ECUACIONES DIFERENCIALES
con aplicaciones en Maple

Jaime Escobar A. [1]

Universidad de Antioquia, Depto de Matematicas

[1]Profesor Titular de la Universidad de Antioquia, Magister en Matemáticas de la Universidad Nacional. Texto en la página Web: http://matematicas.udea.edu.co/ jescobar/

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

ÍNDICE GENERAL

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

1. INTRODUCCION **1**
1.1. **CAMPO DE DIRECCIONES** 5
1.2. **ECUACIÓN DE CONTINUIDAD** 6

2. MÉTODOS DE SOLUCIÓN **7**
2.1. **VARIABLES SEPARABLES** 7
2.2. **ECUACIONES HOMOGÉNEAS** 10
2.3. **E.D. CON COEFICIENTES LINEALES** 14
2.4. **ECUACIONES EXACTAS** 15
2.5. **FACTORES DE INTEGRACIÓN** 20
2.6. **E.D. LINEAL DE PRIMER ORDEN** 26
2.7. **ECUACION DIFERENCIAL DE BERNOULLI** 31
2.8. **E.D. NO LINEALES DE PRIMER ORDEN** 33
2.9. **OTRAS SUSTITUCIONES** 42
2.10. **ANEXO CON EL PAQUETE Maple** 45

3. APLIC. DE LAS E.D. DE PRIMER ORDEN **49**
3.1. **APLICACIONES GEOMÉTRICAS** 49
3.1.1. **Trayectorias Isogonales y Ortogonales** 49
3.1.2. **Problemas de Persecución:** 51
3.1.3. **Aplicaciones a la geometría analítica** 54
3.2. **CRECIMIENTO Y DESCOMPOSICIÓN** 55
3.2.1. **Desintegración radioactiva** 56

3.2.2. **Ley de enfriamiento de Newton** 57
3.2.3. **Ley de absorción de Lambert** 57
3.2.4. **Crecimientos poblacionales** 58
3.3. **PROBLEMAS DE DILUCIÓN** 59
3.4. **VACIADO DE TANQUES** 68
3.5. **APLICACIONES A LA FISICA** 73

4. TEORIA DE LAS E.D.O. LINEALES **81**
4.1. **INTRODUCCION** 81
4.2. **DIMENSIÓN DEL ESP. VECT. SOL. DE UNA E.D.O.** 90
4.3. **MÉTODO DE REDUCCIÓN DE ORDEN** 97
4.4. **E.D. LINEALES CON COEFICIENTES CONST.** . . . 101
4.4.1. **E.D. LINEALES DE ORDEN DOS** 101
4.4.2. **E.D. LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE DOS** 104
4.5. **OPERADOR ANULADOR** 106
4.6. **COEFICIENTES INDETERMINADOS** 109
4.7. **VARIACIÓN DE PARÁMETROS** 112
4.7.1. **GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS** 120
4.8. **OPERADORES** 123
4.9. **OPERADORES INVERSOS** 125
4.10. **E.D.O. DE EULER - CAUCHY** 137
4.11. **APLICAC. DE LA E.D. DE SEGUNDO ORDEN** . . . 141
4.11.1. **MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE** 141
4.11.2. **MOVIMIENTO AMORTIGUADO** 143
4.11.3. **MOVIMIENTO FORZADO.** 146
4.12. **ANEXO CON EL PAQUETE Maple** 160

5. SOLUCIONES POR SERIES **165**
5.1. **INTRODUCCION** 165
5.2. **SOLUCION EN PUNTOS ORDINARIOS** 167
5.3. **SOLUCIONES EN TORNO A PUNTOS SING. REG.** 178
5.3.1. **CASO II:** $r_1 - r_2 =$ **entero positivo** 184
5.3.2. **FUNCIÓN GAMMA:** $\Gamma(x)$ 187
5.3.3. **CASO III:** $r_1 = r_2$ 190
5.3.4. **ECUACIÓN DE BESSEL DE ORDEN** p **:** 194
5.3.5. **PUNTO EN EL INFINITO** 202
5.4. **ANEXO CON EL PAQUETE Maple** 208

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

6. TRANSFORMADA DE LAPLACE **211**
6.1. **INTRODUCCION** 211
6.2. **TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE** 215
6.3. **TEOREMAS SOBRE LA TRANS. DE LAPLACE** . . 218
6.4. **APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA A LAS E.D.** 234
6.5. **IMPULSO UNITARIO O DELTA DE DIRAC** 239
6.6. **ANEXO CON EL PAQUETE Maple** 242

7. SIST. LINEALES DE PRIMER ORDEN **247**
7.1. **INTRODUCCION** 247
7.2. **CONJUNTOS FUND. Y SIST. HOMOGÉNEOS** . . . 250
7.3. **MÉTODO DE LOS VALORES Y VECT. PROPIOS** . 251
7.4. **VARIACIÓN DE PARÁMETROS** 271
7.5. **TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA SISTEMAS** 276
7.6. **ANEXO CON EL PAQUETE Maple** 279

8. INTROD. A LA TEORIA DE ESTABIL. **281**
8.1. **SISTEMAS AUTÓNOMOS, EL PLANO DE FASE** . . 281
8.2. **TIPOS DE PUNTOS CRITICOS, ESTABILIDAD.** . . 286
8.2.1. **TIPOS DE PUNTOS CRITICOS.** 287
8.3. **PUNTOS CRITICOS Y CRITERIOS DE ESTAB.** . . 296
8.4. **CRITERIO DE ESTAB.: METODO DE LIAPUNOV** . 309
8.5. **LINEALIZACION DE SISTEMAS NO LINEALES** . . 318
8.6. **CICLOS LIMITES: TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON** 339
8.7. **ANEXO CON EL PAQUETE Maple** 350

A. Fórmulas **355**
A.1. **Fórmulas Aritméticas** 355
A.2. **Fórmulas Geométricas** 356
A.3. **Trigonometría** 358
A.4. **Tabla de Integrales** 359

B. TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD **363**
B.1. **PRELIMINARES** 363
B.2. **TEOREMA LOCAL DE EXIST. Y UNICID., CASO UNIDIMENSIONAL** 365
B.3. **TEOREMAS LOCAL Y GLOBAL PARA SISTEMAS DE E. D. LINEALES** 372

C. EXPONENCIAL DE OPERADORES **377**

D. TEOREMA DE LIÉNARD **381**

Universidad de Jaén. Dpto. de Matemáticas

E. FRACCIONES PARCIALES **387**
E.1. **Factores lineales no repetidos.** 387
E.2. **Factores Lineales Repetidos.** 388
E.3. **Factores Cuadráticos.** 390
E.4. **Factores Cuadráticos Repetidos.** 391

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

CAPÍTULO 1

INTRODUCCION

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Definición 1.1. *Si una ecuación contiene las derivadas o las diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial (E.D.).*

Si la ecuación contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente entonces la ecuación se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.).

Ejemplo 1. $3\frac{dy}{dx} + 4y = 5$

Ejemplo 2. $(x^2 - y)dx + 5 \operatorname{sen} y \, dy = 0$

Ejemplo 3. $u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx} = x$

Si la ecuación contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación en derivadas parciales.

Ejemplo 4. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Ejemplo 5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = y - x$

Definición 1.2. (Orden). *La derivada o la diferencial de más alto orden determina el orden de la E.D.*

Ejemplo 6. $\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = \ln x$, es de orden 3.

Ejemplo 7. $xdy - ydx = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, la cual es de orden 1.

Definición 1.3 (E.D.O. lineal)**.** *Una E.D. es lineal si tiene la forma:*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Es decir, la variable dependiente y y todas sus derivadas tienen exponente uno y cada coeficiente $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), g(x)$, depende solo de x. Si no se cumple lo anterior se dice que la E.D. no es lineal.

Ejemplo 8. $x^2\frac{d^3y}{dx^3} + \cos x\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} x\frac{dy}{dx} + x^2y = e^x$ es lineal de orden 3.

Ejemplo 9. $\operatorname{sen} x\,\frac{d^3y}{dx^3} + xy^2 = 0$ no es lineal.

Ejemplo 10. $y^2\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} + xy = x$ no es lineal.

Definición 1.4. *. Se dice que una función f con dominio en un intervalo I es solución a una E.D. en el intervalo I, si la función satisface la E.D. en el intervalo I.*

Ejemplo 11. $x = y\ln(cy)$ es solución de $y'(x+y) = y$

En efecto, derivando implícitamente: $1 = \frac{dy}{dx}\ln(cy) + y\frac{1}{cy}\,c\frac{dy}{dx}$

$1 = \frac{dy}{dx}\left(\ln(cy) + 1\right)$, luego $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(cy)+1}$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\frac{y\ln(cy) + y}{\ln(cy) + 1} = \frac{y(\ln(cy) + 1)}{\ln(cy) + 1} = y,$$

luego $y = y$
por tanto $x = y\ln(cy)$ es solución.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Una E.D. acompañada de unas condiciones iniciales se le llama un problema de valor inicial (P.V.I.). Con frecuencia es importante saber si un problema de valor inicial tiene solución y también deseamos saber si esta solución es única, aunque no podamos conseguir explícitamente la solución. El siguiente teorema nos responde las inquietudes que acabamos de plantear.Este teorema lo enunciamos y demostramos con más profundidad en el Apéndice al final del texto.

Teorema 1.1. (Picard)

Sea R una región rectangular en el plano XY definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe un intervalo I con centro en x_0 y una única función $y(x)$ definida en I que satisface el problema de valor inicial $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$.

Ejemplo 12. Para la E.D. $y' = x^2 + y^2$, se tiene que $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ son continuas en todo el plano XY, por lo tanto por cualquier punto (x_0, y_0) del plano XY pasa una y solo una solución de la E.D. anterior. Es importante anotar que para esta E.D. es imposible hallar una solución explícita; sólo con métodos numéricos se puede hallar la solución.

Ejercicio 1. Demostrar que $y = c_1 \cos 5x$ es solución de $y'' + 25y = 0$.

Ejercicio 2. Demostrar que $y = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, dt + c_1 e^{-x^2}$ es solución de $y' + 2xy = 1$.

Ejercicio 3. Demostrar que $y = x \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ es solución de $xy' = y + x \operatorname{sen} x$.

Ejercicio 4. Demostrar que $y = e^{-\frac{x}{2}}$ es solución de $2y' + y = 0$, también $y = 0$ es solución.

Nota: si todas las soluciones de la E.D. $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ en un intervalo I pueden obtenerse de $G(x, y, C_1, \ldots, C_n)$ mediante valores apropiados de C_i, entonces a G se le llama **la solución general**; una solución que no contenga los parámetros C_i se le llama **la solución particular**; una solución que no pueda obtenerse a partir de la solución general se le llama **solución singular**.
Veremos más adelante que la solución general a una E.D. lineal de orden n

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

tiene n parámetros. En las E.D. no lineales a veces no es posible obtener explícitamente una solución general.

Ejemplo 13. $y = Cx^4$ es solución general de $xy' - 4y = 0$.
Con $C = 1$ entonces la solución particular es $y = x^4$.

También

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \geq 0 \\ -x^4 & x < 0 \end{cases}$$

es una solución singular, porque no se puede obtener a partir de la solución general.

Ejercicio 5. Si $y' - xy^{\frac{1}{2}} = 0$, demostrar

a). $y = (\frac{x^2}{4} + C)^2$ es solución general.

b). Si $C = 0$ mostrar que $y = \frac{x^4}{16}$ es solución particular.

c). Explicar porqué $y = 0$ es solución singular.

Ejercicio 6. Si $y' = y^2 - 1$, demostrar

a). $y = \frac{1+Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}}$ es solución general.

b). Explicar porqué $y = -1$ es solución singular.

Ejercicio 7. Si $xy' + 1 = e^y$, comprobar que $e^{-y} - Cx = 1$ es solución general.

Ejercicio 8. Si $2xy\,dx + (x^2 + 2y)\,dy = 0$, comprobar que $x^2y + y^2 = C_1$ es solución general.

Ejercicio 9. Si $(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$, comprobar que
$C_1(x + y)^2 = xe^{\frac{y}{x}}$, es solución general.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

1.1. CAMPO DE DIRECCIONES

Dada la E.D. $y' = f(x, y)$ y sabiendo que la primera derivada representa una dirección en el plano XY, podemos por lo tanto asociar a cada punto (x, y) una dirección. A este conjunto de direcciones lo llamamos el campo de direcciones o campo pendiente de la E.D. $y' = f(x, y)$. Este campo de direcciones nos permite inferir propiedades cualitativas de las soluciones, como por ejemplo si son asintóticas a una recta, si son cerradas o abiertas, etc.. Con el paquete Maple haremos un ejemplo.

Ejemplo 14. Hallar el campo de direcciones de la E.D. $y' = -2x^2 + y^2$ y cuatro curvas solución de la E.D. que pasan por los puntos $(0, 2), (0, 0), (0, 1), (0, -1)$ respectivamente.

```
> with(DEtools):
DEplot (diff(y(x),x)=-2*x^2+y(x)^2,y(x),x=-2..2,color=black,
{[0,2],[0,0],[0,1],[0,-1]},y=-2..2,linecolor=black);
```

Depto. de Matemáticas

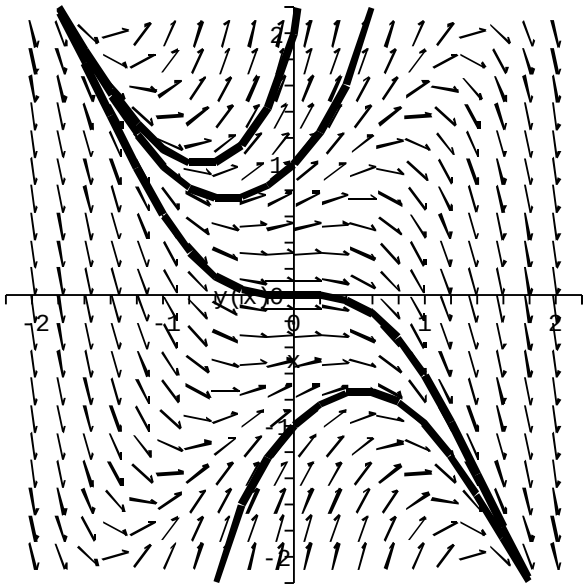


Figura 1.1

1.2. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Para finalizar este Capítulo, es importante hacer un corto comentario sobre la ecuación de continuidad; con ella se construyen modelos de fenómenos en diferentes áreas del conocimiento que dependen del tiempo, dando como resultado una o varias Ecuaciones Diferenciales. La ecuación de continuidad nos dice que la tasa de acumulación de una variable x en un recipiente (el cual puede ser un tanque, un órgano humano, una persona, una ciudad, un banco, una universidad, un sistema ecológico, etc.) es igual a su tasa de entrada menos su tasa de salida; tanto la tasa de entrada como la tasa de salida pueden ser constantes o variables.

Si la variable es x y la tasa de entrada es $E(t)$ y la tasa de salida es $S(t)$ entonces la tasa de acumulación es

$$\frac{dx}{dt} = E(t) - S(t).$$

Ejemplo 15. La concentración de glucosa en la sangre aumenta por ingesta de comidas ricas en azucares, si se suministra glucosa a una razón constante R (en mg/minuto). Al mismo tiempo, la glucosa se transforma y se elimina a una tasa proporcional a la concentración presente de glucosa. Si $C(t)$ representa la concentración de glucosa en un instante t, entonces $E(t) = R$ y $S(t) = kC(t)$, entonces por la ecuación de continuidad, la Ecuación Diferencial que rige este fenómeno es

$$\frac{dC(t)}{dt} = E(t) - S(t) = R - kC(t).$$

Universidad de Antioquia - Depto. de Matemáticas

CAPÍTULO 2

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

2.1. VARIABLES SEPARABLES

Definición 2.1. *Se dice que una E.D. de la forma:* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$ *es separable o de variables separables.*

La anterior ecuación se puede escribir como $h(y)\,dy = g(x)\,dx$ e integrando:

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C,$$

obteniéndose así una familia uniparamétrica de soluciones.

Nota: la constante o parámetro C, a veces es conveniente escribirla de otra manera, por ejemplo, múltiplos de constantes o logaritmos de constantes o exponenciales de constantes o si aparece la suma de varias constantes reunirlas en una sola constante.

Ejemplo 1. $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$
<u>Solución</u>:

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y} = e^{3x}e^{2y}$$

separando variables

$$\frac{dy}{e^{2y}} = e^{3x}dx$$

e integrando

$$-\frac{1}{2}e^{-2y} + C = \frac{e^{3x}}{3}$$

la solución general es

$$\frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{-2y}}{2} = C$$

Ejemplo 2. $\frac{dy}{dx} = xy^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, con $y(0) = 1$

<u>Solución</u>: separando variables

$$y^{-3}dy = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \quad \left\{ \text{haciendo } \begin{array}{lcl} u & = & 1+x^2 \\ du & = & 2xdx \end{array} \right.$$

obtenemos

$$= \frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

e integrando $\dfrac{y^{-2}}{-2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$

solución general

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + C.$$

Cuando $x = 0,\ y = 1$

$$-\frac{1}{2\times 1} = \sqrt{1+0^2} + C$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

luego $C = \frac{-3}{2}$
La solución particular es

$$\frac{-1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} - \frac{3}{2}$$

Resolver los siguientes ejercicios por el método de separación de variables:

Ejercicio 1. $(4y + yx^2)\,dy - (2x + xy^2)\,dx = 0$
(**Rta.** $2 + y^2 = C(4 + x^2)$)

Ejercicio 2. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$
(**Rta.** $y = -\frac{1}{\cos x + c}$)

Ejercicio 3. $3e^x \tan y\,dx + (2 - e^x)\sec^2 y\,dy = 0$
(**Rta.** $(2 - e^x)^3 = C \tan y$)

Ejercicio 4. $y' \operatorname{sen} x = y \ln y$, si $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$
(**Rta.** $\ln y = \csc x - \cot x$)

Ejercicio 5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$
(**Rta.** $(\frac{y+3}{x+4})^5 = Ce^{y-x}$)

Ejercicio 6. $x^2y' = y - xy$, si $y(-1) = -1$
(**Rta.** $\ln|y| = -\frac{1}{x} - \ln|x| - 1$)

Ejercicio 7. Hallar la solución general de la E.D. $\frac{dy}{dx} - y^2 = -9$ y luego hallar en cada caso una solución particular que pase por:
a) $(0,0)$, b) $(0,3)$, c) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
(**Rta.** a) $\frac{y-3}{y+3} = -e^{6x}$, b) $y = 3$, c) $\frac{y-3}{y+3} = -\frac{1}{2}e^{-2}e^{6x}$)

Ejercicio 8. Se suministran bacterias como alimento a una población de protozoarios a una razón constante μ. Se ha observado que las bacterias son devoradas a una tasa proporcional al cuadrado de su cantidad. Si $c(t)$ es la cantidad de bacterias en el instante t, hallar la E.D.; determinar $c(t)$ en función de $c(0)$; ¿cuál es la concentración de equilibrio de las bacterias, es decir, cuando $c'(t) = 0$?
(**Rta.:** $\frac{\sqrt{\mu}+\sqrt{k}c(t)}{\sqrt{\mu}-\sqrt{k}c(t)} = \frac{\sqrt{\mu}+\sqrt{k}c(0)}{\sqrt{\mu}-\sqrt{k}c(0)}e^{2\sqrt{k\mu}t}$; concentración de equilibrio $c = \sqrt{\frac{\mu}{k}}$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejercicio 9. Resolver por variables separables: $a\left[x\frac{dy}{dx}+2y\right]=xy\frac{dy}{dx}$ en $y=a$ y $x=2a$.
(**Rta.:** $yx^2=\frac{4a^3}{e}e^{\frac{y}{a}}$)

2.2. ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Definición 2.2. *$f(x,y)$ es homogénea de grado n si existe un real n tal que para todo t: $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.*

Ejemplo 3. $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ es homogénea de grado dos.

Definición 2.3. *Si una ecuación en la forma diferencial :*

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

tiene la propiedad que $M(tx,ty)=t^nM(x,y)$ y $N(tx,ty)=t^nN(x,y)$, entonces decimos que es de coeficientes homogéneos o que es una E.D. homogénea.

Siempre que se tenga una E.D. homogénea podrá ser reducida por medio de una sustitución adecuada a una ecuación en variables separables.

Método de solución: dada la ecuación

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado; mediante la sustitución $y=ux$ ó $x=yv$ (donde u ó v son nuevas variables dependientes), puede transformarse en una ecuación en variables separables.

Nota: si la estructura algebraica de N es más sencilla que la de M, entonces es conveniente usar las sustitución $y=ux$.
Si la estructura algebraica de M es más sencilla que la de N, es conveniente usar la sustitución $x=vy$.

Ejemplo 4. Resolver por el método de las homogéneas, la siguiente E.D.: $(x+ye^{\frac{y}{x}})\,dx-xe^{\frac{y}{x}}\,dy=0$, con $y(1)=0$.

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

Solución:
$(x + ye^{\frac{y}{x}})\,dx - xe^{\frac{y}{x}}\,dy = 0$ donde

$$\overbrace{M(x,y) = x + ye^{\frac{y}{x}}}^{\text{homogénea de grado 1}} \qquad \text{y} \qquad \overbrace{N(x,y) = -xe^{\frac{y}{x}}}^{\text{homogénea de grado 1}}$$

Como N es más sencilla que M, hacemos la sustitución: $y = ux$, por tanto $dy = u\,dx + x\,du$
Sustituyendo en la E.D.

$$(x + uxe^{\frac{ux}{x}})\,dx - xe^{\frac{ux}{x}}(u\,dx + x\,du) = 0$$

o sea que

$$x\,dx - x^2e^u\,du = 0$$

luego $x\,dx = x^2e^u\,du$, separando variables y considerando $x \neq 0$, obtenemos,

$$\frac{dx}{x} = e^u\,du \Rightarrow \ln x = e^u + C$$

Por lo tanto la solución general es

$$\ln x = e^{\frac{y}{x}} + C$$

Para hallar la solución particular que pasa por el punto $y(1) = 0$, sustituimos en la solución general y obtenemos:

$\ln 1 = e^{\frac{0}{1}} + C \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 + C$ de donde $C = -1$

Por lo tanto,

$$\ln x = e^{\frac{y}{x}} - 1$$

es la solución particular

Ejemplo 5. $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ (ayuda: hacer $y = z^\alpha$ y calcular α para convertirla en homogénea)
Solución:
No es homogénea; hagamos $y = z^\alpha$ y hallemos α de tal manera que la E.D.O. se vuelva homogénea:

$$dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$$

Universidad de Antioquia, Depto de Matematicas

$$(x^2z^{2\alpha}-1)\alpha z^{\alpha-1}dz+2xz^{3\alpha}dx=0$$
$$\alpha(x^2z^{3\alpha-1}-z^{\alpha-1})dz+2xz^{3\alpha}dx=0 \tag{2.1}$$

suma de exponentes en los términos: $2+3\alpha-1,\ \alpha-1$ y $1+3\alpha$ respectivamente.

Análisis de exponentes para que se cumpla la homogeneidad:

$1+3\alpha=2+3\alpha-1=\alpha-1$, se concluye $\alpha=-1$

Sustituyo en la E.D. (2.1): $(-1)(x^2z^{-2}-1)z^{-2}\,dz+2xz^{-3}\,dx=0$

$$(-x^2z^{-4}+z^{-2})\,dz+2xz^{-3}\,dx=0$$

Es homogénea de orden -2.

La sustitución más sencilla es $x=uz\Rightarrow dx=u\,dz+z\,du$.

$$(-u^2z^2z^{-4}+z^{-2})\,dz+2uzz^{-3}(u\,dz+z\,du)=0$$

$$(-u^2z^{-2}+z^{-2}+2u^2z^{-2})\,dz+(2uz^{-1})\,du=0$$

$$(u^2z^{-2}+z^{-2})\,dz+2uz^{-1}\,du=0$$

$$z^{-2}(u^2+1)\,dz+2uz^{-1}\,du=0$$

$$\frac{z^{-2}dz}{z^{-1}}+\frac{2u}{u^2+1}\,du=0$$

$$\frac{dz}{z}+\frac{2u}{u^2+1}\,du=0$$

Integrando: $\ln|z|+\ln(u^2+1)=\ln C$

$$\ln|z(u^2+1)|=\ln C\Rightarrow z(u^2+1)=C$$

reemplazo $u=\frac{x}{z}$ y tenemos, tomando $z\neq 0$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$\frac{x^2}{z} + z = C$$

Como $y = z^{-1}$ o sea que $z = y^{-1}$, entonces $\frac{x^2}{y^{-1}} + y^{-1} = C$ luego

$$x^2y^2 + 1 = Cy,$$

es la solución general.

Resolver los siguientes ejercicios por el método de las homogéneas, ó convertirla en homogénea y resolverla según el caso:

Ejercicio 1. $\left(y + x\cot\frac{y}{x}\right)\,dx - x\,dy = 0.$
(**Rta.:** $C = x\cos\frac{y}{x}$)

Ejercicio 2. $(x + \sqrt{y^2 - xy})\frac{dy}{dx} = y$, con $y(1) = 1$.
(**Rta.:** $\ln^2|y| = 4(\frac{y-x}{y})$)

Ejercicio 3. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)\,dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0.$
(**Rta.:** $\ln|x| + \operatorname{sen}\frac{y}{x} = C$)

Ejercicio 4. $(x^2 - 2y^2)\,dx + xy\,dy = 0.$
(**Rta.:** $x^4 = C(x^2 - y^2)$)

Ejercicio 5. $xy' = y + 2xe^{\frac{-y}{x}}.$
(**Rta.:** $\ln|x| = \frac{1}{2}e^{\frac{y}{x}} + C$)

Ejercicio 6. $(x + y^3)\,dx + (3y^5 - 3y^2x)\,dy = 0$, (Ayuda: hacer $x = z^\alpha$).
(**Rta.:** $\ln|C(x^2 + y^6)| = 2\arctan\frac{y^3}{x}$)

Ejercicio 7. $2(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2})\,dx + x^3\,dy = 0$, (Ayuda: hacer $y = z^\alpha$).
(**Rta.:** $x^4(1 + 2Cy) = C^2$)

Ejercicio 8. $y\cos x\,dx + (2y - \operatorname{sen} x)\,dy = 0$, (Ayuda: hacer $u = \operatorname{sen} x$).
(**Rta.:** $y^2 = Ce^{-\frac{\operatorname{sen} x}{y}}$)

Ejercicio 9. $y(\ln\frac{y}{x} + 1)\,dx - x\ln\frac{y}{x}\,dy = 0.$
(**Rta.:** $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{y}{x}\right) = C$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejercicio 10. $\frac{dy}{dx} = \cos(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x}$.
(**Rta.:** $\sec(\frac{y}{x}) + \tan(\frac{y}{x}) = Cx$)

Ejercicio 11. Hallar la solución particular de la E.D.

$$yx^2dx - (x^3 + y^3)dy = 0,$$

donde $y(0) = 1$
(**Rta.:** $\ln|y| = \frac{1}{3}(\frac{x}{y})^3$)

Ejercicio 12. Hallar la solución particular de la E.D.

$$xy^2dy - (x^3 + y^3)dx = 0,$$

donde $y(1) = 0$
(**Rta.:** $\ln|x| = \frac{1}{3}(\frac{y}{x})^3$)

Ejercicio 13. $(y + \sqrt{xy})dx - 2xdy = 0$
(**Rta.:** $x(\sqrt{\frac{y}{x}} - 1)^4 = C$, si $x > 0, y > 0$ y $x(\sqrt{\frac{y}{x}} + 1)^4 = C$, si $x < 0, y < 0$)

Ejercicio 14. Hallar la solución particular de la E.D.

$$y(\ln y - \ln x - 1)dx + xdy = 0,$$

donde $y(e) = 1$
(**Rta.:** $x \ln|\frac{y}{x}| = e$)

2.3. E.D. DE COEFICIENTES LINEALES: $(ax + by + c)\,dx + (\alpha x + \beta y + \gamma)\,dy = 0$

Se presentan dos casos:

1. Si (h, k) es el punto de intersección entre las rectas:

$$ax + by + c = 0 \text{ y } \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

entonces se hace la sustitución: $x = u + h$ y $y = v + k$ y se consigue la ecuación homogénea:

$$(au + bv)du + (\alpha u + \beta v)dv = 0$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

2. Si las dos rectas no se intersectan (o sea son paralelas), entonces

$$\alpha x + \beta y = n(ax + by)$$

y por tanto se hace la sustitución $z = ax + by$, lo cual quiere decir que $\alpha x + \beta y = nz$, esta sustitución convierte la E.D. en una E.D. de variables separables.

Ejercicios: resolver por el método anterior:

1. $(x - y + 1)\,dx + (x + 2y - 5)\,dy = 0$
(**Rta.:** $(x-1)^2 + 2(y-2)^2 = Ce^{\sqrt{2}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}(y-2)}}$)

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}$
(**Rta.:** $(x+y+1)^3 = C(y-x+3)$)

3. $(x - 2y + 4)\,dx + (2x - y + 2)\,dy = 0$
(**Rta.:** $(x+y-2)^3 = C^2(x-y+2)$)

4. $(x + y + 1)^2\,dx + (x + y - 1)^2\,dy = 0$
(**Rta.:** $4x = -\frac{1}{2}(x+y)^2 + 2(x+y) - \ln|x+y| + C$)

5. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$
(**Rta.:** $4 - x - 2y = 3\ln|2 - x - y| + C$)

6. $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$
(**Rta.:** $C = 2(x+1)(y-3) + (x+1)^2 - (y-3)^2$)

7. $(x - y - 5)\,dx - (x + y - 1)\,dy = 0$
(**Rta.:** $(x+y-1)^2 - 2(x-3)^2 = C$)

8. $(2x + y)\,dx - (4x + 2y - 1)\,dy = 0$
(**Rta.:** $x = \frac{2}{5}(2x+y) - \frac{4}{25} - \frac{1}{25}\ln|5(2x+y) - 2| + C$)

2.4. ECUACIONES EXACTAS

Si $z = f(x, y)$, entonces

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

es la diferencial total de f; pero si $z = c = f(x, y)$ (familia de curvas uniparamétricas en el plano XY), entonces

$$dz = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy.$$

Definición 2.4. *La forma diferencial $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ es una diferencial exacta en una región R del plano XY si corresponde a la diferencial total de alguna función $f(x, y)$.*

La ecuación $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$, es exacta si es la diferencial total de alguna función $f(x, y) = c$.

Teorema 2.1 (Criterio para E.D. exactas).

Si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región R del plano XY, entonces la condición necesaria y suficiente para que la forma diferencial

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

sea una diferencial exacta es que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Demostración: como $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ es una diferencial exacta, entonces existe una función $f(x, y)$ tal que:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = d\, f(x, y)$$

luego

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

y

$$N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

por tanto,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemática

La igualdad entre las derivadas cruzadas se produce porque M y N son continuas con derivadas de primer orden continuas.

Método. Dada la ecuación $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$, hallar una función $f(x,y)=C$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=N$$

i) Comprobar que es exacta, es decir, verificar que $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

ii) Suponer que $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ y luego integrar con respecto a x dejando a y constante:

$$f(x,y)=\int M(x,y)\,dx+g(y) \tag{2.2}$$

iii) Derivar con respecto a y la ecuación (2.2)

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx+g'(y)=N(x,y)$$

despejar

$$g'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx \tag{2.3}$$

Esta expresión es independiente de x, en efecto:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$
$$=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,dx=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=0$$

iv) Integrar la expresión (2.3) con respecto a y y sustituir en (2.2) e igualar a C. ■

Nota: en ii) se pudo haber comenzado por $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$.

Ejemplo 6. Resolver la siguiente E.D.:
$(2xy^2+ye^x)\,dx+(2x^2y+e^x-1)\,dy=0$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Solución:
paso i)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial y}=4xy+e^x\\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=4xy+e^x\end{array}\right\}\ \text{de donde}\ \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

paso ii)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int N(x,y)\,dy+h(x)=\int(2x^2y+e^x-1)\,dy+h(x)\\ &= x^2y^2+ye^x-y+h(x)\end{aligned}$$

paso iii)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}=M &= 2xy^2+ye^x\\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy^2+ye^x+h'(x)\Rightarrow h'(x)=0\end{aligned}$$

paso iv) $h(x)=C$
paso v) sustituyo $h(x)$ en el paso ii):

$$\begin{aligned} x^2y^2+ye^x-y+C_1 &= C\\ x^2y^2+ye^x-y &= C_2\quad\text{Solución general}\end{aligned}$$

Ejemplo 7. Hallar el valor de b para que sea exacta la E.D.:

$$(xy^2+bx^2y)\,dx+(x+y)x^2\,dy=0.$$

Solución:
Como $\frac{\partial M}{\partial y}=2xy+bx^2$ y $\frac{\partial N}{\partial x}=3x^2+2xy$ entonces $b=3$, por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2+3x^2y \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3+x^2y \tag{2.5}$$

integramos (2.4) :

$$f(x,y)=\int(xy^2+3x^2y)\,dx+g(y)=y^2\frac{x^2}{2}+x^3y+g(y) \tag{2.6}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

derivamos (2.6) con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = yx^2 + x^3 + g'(y) \tag{2.7}$$

igualamos (2.5) y (2.7)

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 y &= yx^2 + x^3 + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

luego $g(y) = K$ y reemplazando en (2.6)

$$f(x,y) = y^2\frac{x^2}{2} + x^3 y + K = C_1$$

y por tanto la solución general es

$$\frac{y^2x^2}{2} + x^3 y = C$$

Ejercicio 1. Resolver la siguiente E.D. por el método de las exactas :

$$(\tan x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\, dx + \cos x \cos y\, dy = 0.$$

(**Rta.:** $f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y - \ln|\cos x| = C$)

Ejercicio 2. Resolver la siguiente E.D. por el método de las exactas:

$$(y^2 \cos x - 3x^2 y - 2x)\, dx + (2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)\, dy = 0, \text{ con } y(0) = e.$$

(**Rta.:** $f(x,y) = y^2 \operatorname{sen} x - x^3 y - x^2 + y(\ln y - 1) = 0$)

Ejercicio 3. Determinar la función $M(x,y)$ de tal manera que la siguiente E.D.O sea exacta:

$$M(x,y)\, dx + \left(xe^x y + 2xy + \frac{1}{x}\right)\, dy = 0$$

(**Rta.:** $M(x,y) = \frac{1}{2}y^2 e^x(x+1) + y^2 - \frac{y}{x^2} + g(x)$)

Ejercicio 4. Determinar la función $N(x,y)$ para que la siguiente E.D. sea exacta:

$$\left(y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{x}{x^2+y}\right)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

(**Rta.:** $N(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x^2+y)^{-1} + g(y)$)

Ejercicio 5. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(2xy^2 + ye^x)\,dx + (2x^2y + e^x - 1)\,dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x,y) = y(x^2y + e^x - 1) = C$)

Ejercicio 6. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(2x - y\,\mathrm{sen}\,xy - 5y^4)\,dx - (20xy^3 + x\,\mathrm{sen}\,xy)\,dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x,y) = x^2 + \cos(xy) - 5y^4x = C$)

Ejercicio 7. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(\,\mathrm{sen}\,xy + xy\cos xy)\,dx + (x^2\cos xy)\,dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}\,(xy) = C$)

Ejercicio 8. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(ye^{xy} + 4y^3)\,dx + (xe^{xy} + 12xy^2 - 2y)\,dy = 0,\ \text{con } y(0) = 2$$

(**Rta.:** $f(x,y) = e^{xy} + 4xy^3 - y^2 = -3$)

Ejercicio 9. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(1 - \,\mathrm{sen}\,x\tan y)\,dx + \cos x\sec^2 y\,dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x,y) = \cos x\tan y + x = C$)

Universidad de Antioquia. Depto. de Matemáticas

2.5. FACTORES DE INTEGRACIÓN

Definición 2.5 (Factor Integrante F.I.). *Sea la E.D.*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Si $\mu(x,y)$ es tal que

$$\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$$

es una E.D. exacta, entonces decimos que $\mu(x,y)$ es un factor integrante (F.I.).

Ejemplos de algunas formas diferenciales que son exactas.
Ejemplo: $x\,dx + y\,dy$ es la diferencial de $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ ya que $d\left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right) = x\,dx + y\,dy$.

Análogamente: para $x\,dy + y\,dx = d(xy)$.

Pero $py\,dx + qx\,dy$ no es exacta, la expresión $\mu(x,y) = x^{p-1}y^{q-1}$ es un factor integrante.

Para $y\,dx - x\,dy$, las expresiones:

$$\mu = \frac{1}{y^2}\,;\ \mu = \frac{1}{x^2}\,;\ \mu = \frac{1}{xy}\,;\ \mu = \frac{1}{x^2+y^2}\,;\ \mu = \frac{1}{ax^2+bxy+cy^2}$$

son factores integrantes.

Teorema 2.2 (**Teorema del Factor Integrante**).

Sea $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ una E.D. y $\mu(x,y)$ un factor integrante, con M, N y μ continuas y con primeras derivadas parciales continuas , entonces

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{d\mu}{dx} = -M\frac{d\mu}{dy}$$

Demostración: si μ es tal que $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$ es exacta y $\mu,\ M,\ N$ tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

o sea que

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

luego

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = N\left[\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{M}{N}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right]$$

como $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$, entonces:

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\left[\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right] = N\frac{d\mu}{dx} = -M\frac{d\mu}{dy}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

ya que si $\mu = \mu(x, y)$ y $\quad y = y(x)$ entonces:

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \mu}{\partial y}\, dy$$

y por tanto

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

■

Nota.

1. Si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$,
   entonces $\mu f(x) = \frac{d\mu}{dx}$ y por tanto $f(x)dx = \frac{d\mu}{\mu}$,
   luego $\mu = ke^{\int f(x)dx}$; tomando $k = 1$ se tiene $\mu = e^{\int f(x)dx}$.

2. Similarmente, si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = g(y)$, entonces $\mu = e^{\int g(y)dy}$.

Ejemplo 8. $(2xy^2 - 2y)\, dx + (3x^2y - 4x)\, dy = 0$.
<u>Solución:</u>

$$M(x, y) = 2xy^2 - 2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 2$$

$$N(x, y) = 3x^2y - 4x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy - 4$$

luego

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy + 2$$

por tanto

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{-2xy + 2}{-2xy^2 + 2y} = \frac{2(-xy + 1)}{2y(-xy + 1)}$$

luego

$$g(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow F.I. = \mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln|y|} = y$$

multiplico la E.D. original por y: $(2xy^3 - 2y^2)\, dx + (3x^2y^2 - 4xy)\, dy = 0$

el nuevo $M(x, y) = 2xy^3 - 2y^2$ y el nuevo $N(x, y) = 3x^2y^2 - 4xy$

Universidad de Antioquia, Depto de Matematicas

Paso 1.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 - 4y$$

y

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 - 4y$$

luego es exacta.

Paso 2.

$$f(x,y) = \int (2xy^3 - 2y^2)dx + g(y) = x^2y^3 - 2xy^2 + g(y)$$

Paso 3. Derivando con respecto a y:

$$N = 3x^2y^2 - 4xy = \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4xy + g'(y)$$

luego $g'(y) = 0$

Paso 4. $g(y) = k$

Paso 5. Reemplazo en el paso 2.

$$f(x,y) = x^2y^3 - 2xy^2 + k = c$$

luego $x^2y^3 - 2xy^2 = k_1$ que es la solución general.

Ejemplo 9. $x\,dy - y\,dx = (6x^2 - 5xy + y^2)\,dx$
<u>Solución:</u>

como $d(\frac{y}{x}) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$

entonces dividimos a ambos lados de la E.D. por x^2, luego

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \left(\frac{6x^2 - 5xy + y^2}{x^2}\right)dx$$

luego

$$d(\frac{y}{x}) = \left(6 - 5(\frac{y}{x}) + (\frac{y}{x})^2\right)dx,$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

hagamos $u = \frac{y}{x} \Rightarrow du = (6 - 5u + u^2)dx$

luego $\dfrac{du}{6 - 5u + u^2} = dx \Rightarrow \dfrac{du}{(u-3)(u-2)} = dx$

pero por fracciones parciales $\dfrac{1}{(u-3)(u-2)} = \dfrac{A}{u-3} + \dfrac{B}{u-2}$

o sea que $A = 1$ y $B = -1$, por tanto

$$\int \frac{du}{(u-3)(u-2)} = \int dx \Rightarrow \int \frac{du}{u-3} - \int \frac{du}{u-2} = \ln|u-3| - \ln|u-2| + \ln c = x$$

luego

$$c\frac{(u-3)}{(u-2)} = e^x, \text{ si } x \neq 0 \Rightarrow c\frac{(y-3x)}{(y-2x)} = e^x$$

Obsérvese que $x = 0$ es también solución y es singular porque no se desprende de la solución general.

En los siguientes ejercicios, hallar el factor integrante y resolver por el método de las exactas:

Ejercicio 1. $(\cos(2y) - \operatorname{sen} x)\, dx - 2\tan x \operatorname{sen}(2y)\, dy = 0.$
(**Rta.:** $\operatorname{sen} x \cos(2y) + \frac{1}{2}\cos^2 x = C$)

Ejercicio 2. $(3xy^3 + 4y)\, dx + (3x^2y^2 + 2x)\, dy = 0.$
(**Rta.:** $f(x,y) = x^3y^3 + 2x^2y = C$)

Ejercicio 3. $2xy \ln y\, dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\, dy = 0.$
(**Rta.:** $f(x,y) = x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}} = C$)

Ejercicio 4. $(2wz^2 - 2z)\, dw + (3w^2z - 4w)\, dz = 0.$
(**Rta.:** $w^2z^3 - 2z^2w = C$)

Ejercicio 5. $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)dy = 0$
(**Rta.:** $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + y^2 = C$)

Ejercicio 6. $x\, dy + y\, dx = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(dx + dy).$
(**Rta.:** $xy = \frac{1}{4}(x+y)^4 + C$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejercicio 7. $x\,dy - y\,dx = (2x^2+3y^2)^3(2xdx+3ydy)$.
(**Rta.:** $\sqrt{\frac{2}{3}}\tan^{-1}(\sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{y}{x}) = \frac{1}{3}(2x^2+3y^2)^3 + C$)

Ejercicio 8. $y\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0$.
(**Rta.:** $y^2x - y^2e^y + 2ye^y - 2e^y = C$)

Ejercicio 9. $(xy-1)dx + (x^2-xy)dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = xy - \ln|x| - \frac{y^2}{2} = C$)

Ejercicio 10. $ydx + (x^2y - x)dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = C$)

Ejercicio 11. $(2xy - e^{-2x})dx + xdy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = ye^{2x} - \ln|x| = C$)

Ejercicio 12. $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = xe^{2y} - \ln|y| = C$)

Ejercicio 13. $(x+y)dx + x\ln x dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = x + y\ln x = C$)

Ejercicio 14. Hallar la solución particular que pasa por el punto $y(1) = -2$, de la E.D.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy}$$

(**Rta.:** $x^3y^2 + y^3x = -4$)

Ejercicio 15. $x\,dx + y\,dy = 3\sqrt{x^2+y^2}\ y^2\,dy$.
(**Rta.:** $\sqrt{x^2+y^2} = y^3 + C$)

Ejercicio 16. $4y\,dx + x\,dy = xy^2\,dx$.
(**Rta.:** $\frac{1}{yx^4} - \frac{1}{3x^3} = C$)

Ejercicio 17. Si

$$\frac{M_y - N_x}{yN - xM} = R(xy),$$

entonces $\mu = F.I. = e^{\int^t R(s)\,ds}$, donde $t = xy$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejercicio 18. Bajo que condiciones $Mdx + Ndy = 0$ tendrá un F.I.= $\mu(x+y)$
(**Rta.:** $\frac{M_y - N_x}{N - M} = f(x+y)$)

Ejercicio 19. Si $Mdx + Ndy = 0$ es homogénea, entonces $\mu(x,y) = \frac{1}{xM+yN}$

2.6. E.D. LINEAL DE PRIMER ORDEN

Definición 2.6. *Una E.D. de la forma:*

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x),$$

donde $a_1(x) \neq 0$, *en* I *y* $a_1(x), a_0(x), h(x)$ *son continuas en* I, *se le llama E.D. lineal en* y, *de primer orden.*

Dividiendo por $a_1(x)$, se obtiene la llamada ecuación en forma canónica ó forma estandar:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x),$$

donde $p(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ y $Q(x) = \dfrac{h(x)}{a_1(x)}$.

Teorema 2.3 (**Teorema de la E.D. lineal de primer orden**).

La solución general de la E.D. lineal en y, *de primer orden:*

$$y' + p(x)y = Q(x)$$

es :

$$ye^{\int p(x)\,dx} = \int e^{\int p(x)\,dx} Q(x)\,dx + C.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + p(x)y &= Q(x) \\ &\Rightarrow p(x)y\,dx + dy = Q(x)\,dx \end{aligned} \tag{2.9}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

o sea que $(p(x)y - Q(x))\,dx + dy = 0$, como $\frac{\partial M}{\partial y} = p(x)$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$, entonces

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x)$$

y por tanto $\mu = e^{\int p(x)\,dx} = F.I.$; multiplicando (2.9) por el $F.I.$:

$$e^{\int p(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + p(x)ye^{\int p(x)\,dx} = Q(x)e^{\int p(x)\,dx}$$

o sea $\frac{d}{dx}(ye^{\int p(x)\,dx}) = Q(x)e^{\int p(x)\,dx}$ e integrando con respecto a x se tiene:

$$ye^{\int p(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C \qquad \blacksquare$$

Obsérvese que la expresión anterior es lo mismo que:

$$y\,F.I. = \int Q(x)\,F.I.\,dx + C$$

Ejemplo 10. Hallar la solución general de la E.D.:$(6 - 2\mu\nu)\frac{d\nu}{d\mu} + \nu^2 = 0$

<u>Solución:</u>

$$\frac{d\nu}{d\mu} = -\frac{\nu^2}{6 - 2\mu\nu}$$

$$\frac{d\mu}{d\nu} = -\frac{6}{\nu^2} + \frac{2\mu}{\nu}$$

$$\frac{d\mu}{d\nu} - \frac{2\mu}{\nu} = -\frac{6}{\nu^2}$$

que es lineal en μ con

$$p(\nu) = -\frac{2}{\nu},\ Q(\nu) = -\frac{6}{\nu^2}$$

$$F.I. = e^{\int p(\nu)d\nu} = e^{\int -\frac{2}{\nu}d\nu} = e^{-2\ln|\nu|} = e^{\ln|\nu|^{-2}} = \nu^{-2} = \frac{1}{\nu^2}$$

La solución general es

$$\frac{1}{\nu^2}\mu = \int \frac{1}{\nu^2}(-\frac{6}{\nu^2})d\nu + C$$

Universidad de Antioquia Depto. de Matematicas

$$\frac{1}{\nu^2}\mu = -6\int \nu^{-4}d\nu + C = -6\frac{\nu^{-3}}{-3} + C$$

$$\frac{\mu}{\nu^2} = \frac{2}{\nu^3} + C \Rightarrow \mu = \frac{2}{\nu} + C\nu^2$$

que es la solución general.

Ejemplo 11. Hallar una solución continua de la E.D.: $\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$

donde $f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \le x < 1 \\ 0\,, & x \ge 1 \end{cases}$

y $y(0) = 2$

<u>Solución</u>:

$$F.I.: e^{\int 2xdx} = e^{x^2} \Rightarrow e^{x^2}y = \int e^{x^2}f(x)dx + C$$

a). si $0 \le x < 1 : e^{x^2}y = \int e^{x^2}x\,dx + C$
$e^{x^2}y = \frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$, que es la solución general. Hallemos C con la condición incial
$y(0) = 2 \Rightarrow e^{0^2}2 = \frac{1}{2}e^{0^2} + C \quad \Rightarrow C = \frac{3}{2}$
luego $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}$, solución particular.

b). si $x \ge 1 : F.I.y = \int F.I.\,0\,dx + C$
$e^{x^2}y = 0 + C \Rightarrow y = Ce^{-x^2}$

Solución general: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2} & 0 \le x < 1 \\ Ce^{-x^2} & x \ge 1 \end{cases}$

Busquemos C, de tal manera que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$. Por tanto

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}\right) = f(1) = y(1)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-1} = Ce^{-1}, \quad \Rightarrow C = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-1}}{e^{-1}} = \frac{1}{2}\,e + \frac{3}{2}$$

Ejemplo 12. Con un cambio de variable adecuado transformar la E.D.:

$$y' + x\,\mathrm{sen}\,2y = xe^{-x^2}\cos^2 y$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

en una E.D. lineal de primer orden y luego resolverla.
Solución. Lo trabajamos mediante cambios de variable.
Dividiendo por $\cos^2 y$:

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} + \frac{x(2\operatorname{sen} y\cos y)}{\cos^2 y} = xe^{-x^2}$$

$$\sec^2 y\frac{dy}{dx} + 2x\tan y = xe^{-x^2}$$

hagamos el siguiente cambio de variable: $t = \tan y$, por lo tanto

$$\frac{dt}{dx} = \sec^2 y\frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo

$$\frac{dt}{dx} + 2xt = xe^{-x^2}, \quad \text{es lineal en t con}$$

$$p(x) = 2x, \qquad Q(x) = xe^{-x^2}$$

$$F.I. = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

Resolviéndola

$$t\,F.I. = \int F.I.Q(x)\,dx + C$$

$$te^{x^2} = \int e^{x^2}(xe^{-x^2})\,dx + C$$

$$\Rightarrow \tan y\, e^{x^2} = \frac{x^2}{2} + C$$

Ejercicio 1. Hallar una solución continua de la E.D.:

$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$

donde $f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \le x < 1 \\ -x\,, & x \ge 1 \end{cases}$

con $y(0) = 0$.

(**Rta.:** $y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2(1+x^2)}, & \text{si } 0 \le x < 1 \\ -\frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{1}{1+x^2}, & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$)

Universidad de Antioquia, Depto de Matemáticas

Ejercicio 2. Hallar la solución de la E.D.: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}$ con $y(5) = 2$
(**Rta.:** $xy = \frac{y^2}{2} + 8$)

Ejercicio 3. Resolver para $\varphi(x)$ la ecuación $\int_0^1 \varphi(\alpha x)\, d\alpha = n\varphi(x)$
(Ayuda: con un cambio de variable adecuado transforme la ecuación en una E.D. lineal de primer orden.)
(**Rta.:** $\varphi(x) = Cx^{(\frac{1-n}{n})}$)

Ejercicio 4. Hallar la solución de la E.D.: $y' - 2xy = \cos x - 2x \operatorname{sen} x$ donde y es acotada cuando $x \to \infty$.
(**Rta.:** $y = \operatorname{sen} x$)

Ejercicio 5. Hallar la solución de la E.D.: $2\sqrt{x}\, y' - y = -\operatorname{sen}\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}$ donde y es acotada cuando $x \to \infty$.
(**Rta.:** $y = \cos\sqrt{x}$)

Ejercicio 6. Resolver la E.D.: $(x+2)^2 \frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$.
(**Rta.:** $y(2+x)^4 = \frac{5}{3}(2+x)^3 + C$)

Ejercicio 7. Resolver la E.D.: $y - x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} y^2 e^y$.
(**Rta.:** $\frac{x}{y} = e^y + C$)

Ejercicio 8. El suministro de glucosa al torrente sanguíneo es una técnica importante para detectar la diabetes en una persona. Para estudiar este proceso, definimos $G(t)$ como la cantidad de glucosa presente en la sangre de un paciente en el tiempo t. Suponga que la glucosa se suministra al sistema sanguíneo a una tasa constante $k\frac{gr.}{min.}$. Al mismo tiempo la glucosa se transforma y se separa de la sangre a una tasa proporcional a la cantidad de glucosa presente. Construir la E.D. y resolverla. Hallar $G(t)$ cuando $t \to \infty$.

Ejercicio 9. Hallar la solución general en términos de $f(x)$, de la E.D.:

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{f'(x)}{f(x)}\, y = f'(x)$$

(**Rta.:** $y = \frac{1}{3}f(x) + \frac{C}{[f(x)]^2}$)

Ejercicio 10. Hallar la solución general de la E.D.

$$(x+1)y' + (2x-1)y = e^{-2x}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

(**Rta.:** $y = -\frac{1}{3}e^{-2x} + Ce^{-2x}(x+1)^3$)

Ejercicio 11. Hallar la solución particular de la E.D.

$$y' + y = 2xe^{-x} + x^2 \text{si } \ y(0) = 5$$

(**Rta.:** $y = x^2e^{-x} + x^2 - 2x + 2 + 3e^{-x}$)

Ejercicio 12. Hallar la solución particular de la E.D.

$$(1 - 2xy^2)dy = y^3dx$$

si $y(0) = 1$
(**Rta.:** $xy^2 = \ln y$)

2.7. ECUACION DIFERENCIAL DE BERNOULLI

Definición 2.7. *Una E.D. de la forma* $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n$ *con* $n \neq 0$ *y* $n \neq 1$, *se le llama una E.D. de Bernoulli. Obsérvese que es una E.D. no lineal.*

La sustitución $w = y^{1-n}$ convierte la E.D. de Bernoulli en una E.D. lineal en w de primer orden:

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)p(x)w = (1-n)\,Q(x).$$

Ejemplo 13. $xy(1+xy^2)\frac{dy}{dx} = 1$ con $y(1) = 0$.
<u>Solución:</u>
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy\,(1+xy^2)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dy} = xy\,(1+xy^2) = xy + x^2y^3$

$$\frac{dx}{dy} - xy \;=\; x^2y^3 \tag{2.10}$$

tiene la forma de Bernoulli con variable dependiente x, con $n = 2$
Hagamos $w = x^{1-2} = x^{-1} \Rightarrow x = w^{-1}$

$$\frac{dx}{dy} = -w^{-2}\frac{dw}{dy}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

sustituimos en (2.10): $-w^{-2}\frac{dw}{dy} - yw^{-1} = y^3w^{-2}$
multiplicamos por $-w^2$: $\frac{dw}{dy} + yw = -y^3$, lineal en w de primer orden.
luego $p(y) = y;\ Q(y) = -y^3$

$$F.I. = e^{\int P(y)\,dy} = e^{\int y\,dy} = e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$w\,F.I. = \int F.I.\,Q(y)\,dy + C$$

$$w\,e^{\frac{y^2}{2}} = \int e^{\frac{y^2}{2}}(-y^3)\,dy + C$$

hagamos: $u = \frac{y^2}{2} \Rightarrow du = y\,dy$, $y^2 = 2u$

$$w\,e^{\frac{y^2}{2}} = -\int y^3 e^{\frac{y^2}{2}}\,dy + C = -2\int ue^u\,du + C$$

e integrando por partes, obtenemos: $w\,e^{\frac{y^2}{2}} = -2u\,e^u + 2e^u + C$

$$x^{-1}e^{\frac{y^2}{2}} = -y^2e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} + C \Rightarrow \frac{1}{x} = -y^2 + 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$$

Como $y(1) = 0$ entonces $C = -1$, por lo tanto la solución particular es:

$$\frac{1}{x} = -y^2 + 2 - e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Resolver las E.D. de los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}$ con $y(1) = 1$.
(**Rta.:** $y^3 = -3x^2 + 4x^{\frac{3}{2}}$)

Ejercicio 2. $y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$.
(**Rta.:** $x^3 = -y - 2 + Ce^y$)

Ejercicio 3. $tx^2\frac{dx}{dt} + x^3 = t\cos t$.
(**Rta.:** $x^3t^3 = 3(3(t^2-2)\cos t + t(t^2-6)\operatorname{sen} t) + C$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejercicio 4. $y' = \frac{x}{x^2y+y^3}$.
(**Rta.:** $x^2 + y^2 + 1 = Ce^{y^2}$)

Ejercicio 5. $xy' + y = x^4y^3$.
(**Rta.:** $y^{-2} = -x^4 + cx^2$)

Ejercicio 6. $xy^2y' + y^3 = \frac{\cos x}{x}$.
(**Rta.:** $x^3y^3 = 3x \operatorname{sen} x + 3\cos x + C$)

Ejercicio 7. $x^2y' - y^3 + 2xy = 0$.
(**Rta.:** $y^{-2} = \frac{2}{5x} + Cx^4$)

Ejercicio 8. Hallar la solución particular de la E.D.

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = \sqrt{y}(\frac{x}{y^2})^{\frac{3}{2}}$$

tal que $y(1) = 1$
(**Rta.:** $y^3 = x$)

Ejercicio 9. Hallar $y(x)$ en función de $f(x)$ si

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\, y = f(x)y^2$$

(**Rta.:** $y = \frac{1}{(1-Ce^{\int f(x)\ dx})}$)

2.8. E.D. NO LINEALES DE PRIMER ORDEN

Sea

$$(y')^n + a_1\,(x,y)(y')^{n-1} + a_2\,(x,y)(y')^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0,$$

donde $a_i\,(x,y)$ para $i = 1 \ldots n$ son funciones reales y continuas en una región R del plano XY.
Casos:

i) Se puede despejar y'.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

ii) Se puede despejar y.

iii) Se puede despejar x.

Caso i). Si hacemos $p = \frac{dy}{dx} = y'$, entonces

$$p^n + a_1(x,y)p^{n-1} + a_2(x,y)p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(x,y)p + a_n(x,y) = 0.$$

En caso que sea posible que la ecuación anterior se pueda factorizar en factores lineales de p, se obtiene lo siguiente:

$$(p - f_1(x,y))(p - f_2(x,y)) \ldots (p - f_n(x,y)) = 0,$$

donde $f_i(x,y)$ para $i = 1, \ldots, n$ son funciones reales e integrables en una región R del plano XY.

Si cada factor tiene una solución $\varphi_i(x,y,c) = 0,$ para $i = 1, \ldots, n$. entonces la solución general es $\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x,y,c) = 0$.

Ejemplo 14. $(y' - \operatorname{sen} x)((y')^2 + (2x - \ln x)y' - 2x \ln x) = 0$.
<u>Solución:</u>

$$(p - \operatorname{sen} x)(p^2 + (2x - \ln x)p - 2x \ln x) = 0$$

$$(p - \operatorname{sen} x)(p + 2x)(p - \ln x) = 0$$

Para el factor $p - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow dy = \operatorname{sen} x\, dx \Rightarrow$ $y = -\cos x + C$

$$\phi_1(x,y,C) = 0 = y + \cos x - C$$

Para el factor $p + 2x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow dy = -2x\, dx$

$$\Rightarrow y = -x^2 + C \Rightarrow \phi_2(x,y,C) = 0 = y + x^2 - C$$

Para el factor $p - \ln x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln x \Rightarrow dy = \ln x\, dx$

$$y = \int \ln x\, dx + C,$$

e integrando por partes:

$$y = \int \ln x\, dx + C = x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - x + C$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

$$\phi_3(x, y, C) = 0 = y - x\ln x + x - C$$

La solución general es: $\prod_{i=1}^{3} \phi_i(x, y, C) = 0$

$$(y + \cos x - C)(y + x^2 - C)(y - x\ln x + x - C) = 0$$

Resolver por el método anterior los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $p\,(p^2 - 2xp - 3x^2) = 0$.
(**Rta.:** $(y - c)(2y - 3x^2 + c)(2y + x^2 + c) = 0$)

Ejercicio 2. $6\mu^2 \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^2 - 13\mu\nu\frac{d\nu}{d\mu} - 5\nu^2 = 0$.
(**Rta.:** $(\nu\mu^{\frac{1}{3}} - c)(\nu\mu^{-\frac{5}{2}} - c) = 0$)

Ejercicio 3. $(y')^3 - y(y')^2 - x^2y' + x^2y = 0$.
(**Rta.:** $(x - \ln|y| + c)(y + \frac{x^2}{2} - c)(y - \frac{x^2}{2} - c) = 0$)

Ejercicio 4. $n^2p^2 - x^{2n} = 0$, con $n \neq 0$ y $\frac{dy}{dx} = p = y'$.
(**Rta.:** $(y + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - c)(y - \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - c) = 0$)

Ejercicio 5. $x^2(y')^2 + 2xyy' + y^2 = xy$

Ejercicio 6. Denotando por P cualquier punto sobre una curva C y T el punto de intersección de la tangente con el eje Y. Hallar la ecuación de C si $\overline{PT} = k$.
(**Rta.:**$(y + c)^2 = \left[\sqrt{k^2 - x^2} + k\ln\left|\frac{\sqrt{k^2-x^2}-k}{x}\right|\right]^2$, con $|x| \leq k, k > 0$.)

Caso ii). Son ecuaciones de la forma $F(x, y, p) = 0$ y de la cual puede despejarse y, es decir: $y = f(x, p)$, donde x y p se consideran como variables independientes, la diferencial total es:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial p}\,dp$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

o sea que

$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right) + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = g(x, p, p'), \text{ donde } p' = \frac{dp}{dx}$$

y por tanto

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right) dx + \frac{\partial f}{\partial p}\, dp = 0$$

es una E.D. de primer orden en x y p. Generalmente (teniendo buena suerte)

$$g(x, p, p') = 0$$

se puede factorizar, quedando así: $g(x, p, p') = h(x, p, p')\, \phi\,(x, p) = 0$.

a) Con el factor $h(x, p, p') = 0$ se obtiene una solución $h_1(x, p, c) = 0$, se elimina p entre $h_1(x, p, c) = 0$ y $F(x, y, p) = 0$ y se obtiene la solución general.

b) Con $\phi(x, p) = 0$ se obtiene una solución singular, al eliminar p entre $\phi(x, p) = 0$ y $F(x, y, p) = 0$.

Ejemplo 15. $y = f(x, p) = (px + x^2)\ln x + (px + x^2)^2 - \frac{x^2}{2}$, donde $p = \frac{dy}{dx}$

<u>Solución</u>: $\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$
si $x \neq 0$

$$p = (p+2x)\ln x + (px+x^2)\frac{1}{x} + 2(px+x^2)(p+2x) - x + [x\ln x + 2(px+x^2)x]\frac{dp}{dx}$$

$$p = (p + 2x)\ln x + p + x + 2x(p + x)(p + 2x) - x + [x\ln x + 2x^2(p + x)]\tfrac{dp}{dx}$$

$$0 = (p + 2x)\ln x + 2x(p + x)(p + 2x) + [x\ln x + 2x^2(p + x)]\tfrac{dp}{dx}$$

$$0 = (p + 2x)[\ln x + 2x(p + x)] + x[\ln x + 2x(p + x)]\tfrac{dp}{dx}$$

$$0 = [\ln x + 2x(p + x)]\left[p + 2x + x\tfrac{dp}{dx}\right]$$

$$0 = h(x, p), \Phi(x, p, p')$$

1) Con el factor $\Phi(x, p, p') = p + 2x + x\frac{dp}{dx} = 0$

Universidad de Antioquia, Dpto de Matemáticas

$\Rightarrow x\frac{dp}{dx} + p = -2x \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} \frac{dp}{dx} + \frac{p}{x} = -2$ (dividimos por x)

E.D.lineal en p, $P(x) = \frac{1}{x},\ Q(x) = -2$

$F.I. = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln|x|} = x$

$p\,F.I. = \int F.I.Q(x)\,dx + C$

$px = \int x(-2)\,dx + C = -\frac{2x^2}{2} + C = -x^2 + C$

$p = -x + \frac{C}{x}$ (dividimos por x)

luego sustituimos en la E.D. original:

$$y = (px + x^2)\ln x + (px + x^2)^2 - \frac{x^2}{2}$$

$$y = (-x^2 + C + x^2)\ln x + (-x^2 + C + x^2)^2 - \frac{x^2}{2}$$

solución general

$$y = C\ln x + C^2 - \frac{x^2}{2}$$

2) $h(x,p) = \ln x + 2x(p + x) = 0$

$$0 = \ln x + 2xp + 2x^2$$

$$2xp = -\ln x - 2x^2$$

luego $p = -\frac{\ln x - 2x^2}{2x} \Rightarrow px = -\frac{\ln x + 2x^2}{2}$

sustituyo en la E.D. original:

$$y = (px + x^2)\ln x + (px + x^2)^2 - \frac{x^2}{2}$$

$$y = \left(-\frac{\ln x + 2x^2}{2} + x^2\right)\ln x + \left(-\frac{\ln x + 2x^2}{2} + x^2\right)^2 - \frac{x^2}{2}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$y = \left(\frac{-\ln x - 2x^2 + 2x^2}{2}\right)\ln x + \left(\frac{-\ln x - 2x^2 + 2x^2}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{2}$$

$$y = -\frac{\ln^2 x}{2} + \frac{\ln^2 x}{4} - \frac{x^2}{2}$$

luego la solución singular es

$$y = -\frac{\ln^2 x}{4} - \frac{x^2}{2}$$

Resolver por el método anterior los siguientes ejercicios, donde $p = \frac{dy}{dx}$:

Ejercicio 1. $xp^2 - 2yp + 3x = 0$.
(**Rta.:** $2cy = c^2x^2 + 3, \quad y^2 = 3x^2$)

Ejercicio 2. $y = px\ln x + p^2x^2$.
(**Rta.:** $y = c\ln x + c^2, \quad y = -\frac{1}{4}\ln^2 x$)

Ejercicio 3. $y = 5xp + 5x^2 + p^2$.
(**Rta.:** $y = cx - x^2 + c^2, \quad 4y + 5x^2 = 0$)

Ejercicio 4. $p^2x^4 = y + px$.
(**Rta.:** $y = c^2 - cx^{-1}, \quad y = -\frac{1}{4x^2}$)

Ejercicio 5. $2y = 8xp + 4x^2 + 3p^2$.
(**Rta.:** $2y = 3(c-x)^2 + 8(c-x)x + 4x^2, \quad y = -\frac{2x^2}{3}$)

Ejercicio 6. $y = xp - \frac{1}{3}p^3$.
(**Rta.:** $y = cx - \frac{1}{3}c^3, \quad y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$)

Caso iii). Si en la ecuación $F(x, y, p) = 0$, se puede despejar $x = g(y, p)$ con y y p como variables independientes; hacemos $\frac{dy}{dx} = p$, o sea que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ y como

$$dx = \frac{\partial g}{\partial y}\,dy + \frac{\partial g}{\partial p}\,dp$$

luego

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

por tanto

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{p}\right) + \frac{\partial g}{\partial p}\,\frac{dp}{dy} = 0 = h(y, p, p')$$

donde $p' = \frac{dp}{dy}$.

Ejemplo 16. $\cos^2\beta\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^3 - 2\alpha\frac{d\beta}{d\alpha} + 2\tan\beta = 0$

<u>Solución</u>: con $p = \frac{d\beta}{d\alpha}$, se tiene:

$$\alpha = \frac{\cos^2\beta\, p^3 + 2\tan\beta}{2p}$$

$$\alpha = \frac{\cos^2\beta\, p^2}{2} + \frac{\tan\beta}{p} = g(\beta, p)$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial g}{\partial \beta} + \frac{\partial g}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial \beta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} = -\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta\, p^2 + \frac{\sec^2\beta}{p} + \left[p\cos^2\beta - \frac{\tan\beta}{p^2}\right]\frac{dp}{d\beta}$$

Teniendo en cuenta la identidad: $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$;

$$\frac{1}{p} = -\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta\, p^2 + \frac{1}{p} + \frac{\tan^2\beta}{p} + \left[p\cos^2\beta - \frac{\tan\beta}{p^2}\right]\frac{dp}{d\beta}$$

$$0 = -\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta\, p^2 + \frac{\tan^2\beta}{p} + \left[p\cos^2\beta - \frac{\tan\beta}{p^2}\right]\frac{dp}{d\beta}$$

$$0 = -\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta\, p^2 + \frac{\tan^2\beta}{p} + \frac{1}{p}\left[p^2\cos^2\beta - \frac{\tan\beta}{p}\right]\frac{dp}{d\beta}$$

$$0 = \tan\beta\left[\frac{-\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta\, p^2}{\tan\beta} + \frac{\tan\beta}{p}\right] + \frac{1}{p}\left[p^2\cos^2\beta - \frac{\tan\beta}{p}\right]\frac{dp}{d\beta}$$

$$0 = -\tan\beta\left[\cos^2\beta\, p^2 - \frac{\tan\beta}{p}\right] + \frac{1}{p}\left[p^2\cos^2\beta - \frac{\tan\beta}{p}\right]\frac{dp}{d\beta}$$

$$0 = \left[\cos^2\beta\, p^2 - \frac{\tan\beta}{p}\right]\left[-\tan\beta + \frac{1}{p}\,\frac{dp}{d\beta}\right]$$

$$0 = h(\beta, p)\;\phi(\beta, p, p'), \qquad \text{donde } p = \frac{d\beta}{d\alpha} \text{ y } p' = \frac{dp}{d\beta}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$① : \ \phi(\beta, p, p') = -\tan\beta + \frac{1}{p}\frac{dp}{d\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p}\frac{dp}{d\beta} = \tan\beta \Rightarrow \frac{dp}{p} = \tan\beta\, d\beta$$

$$\Rightarrow \ln|p| = -\ln|\cos\beta| + \ln|C|$$

$$\ln|p| = \ln\frac{|c|}{|\cos\beta|} \Rightarrow p = \frac{c}{\cos\beta}, \quad \text{donde } \cos\beta \neq 0$$

Sustituyendo en el la E.D. original:

$$\cos^2\beta\, p^3 - 2\alpha\, p + 2\tan\beta = 0$$

$$\cos^2\beta\,\frac{c^3}{\cos^3\beta} - 2\alpha\,\frac{c}{\cos\beta} + 2\tan\beta = 0$$

$$\frac{c^3}{\cos\beta} - 2\alpha\,\frac{c}{\cos\beta} + 2\tan\beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\frac{c^3}{\cos\beta} + 2\tan\beta}{2\,\frac{c}{\cos\beta}} = \frac{\frac{c^3}{\cos\beta} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\beta}}{2\,\frac{c}{\cos\beta}}$$

La solución general es :

$$= \frac{c^3 + 2\,\mathrm{sen}\,\beta}{2c} = \frac{c^2}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,\beta}{c}; \quad c \neq 0$$

$$② : \ h(\beta, p) = 0 = \cos^2\beta\, p^2 - \frac{\tan\beta}{p}$$

$$\cos^2\beta\, p^2 = \frac{\tan\beta}{p} \Rightarrow p^3 = \frac{\tan\beta}{\cos^2\beta}$$

$$p = \sqrt[3]{\frac{\tan\beta}{\cos^2\beta}} = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{sen}\,\beta}{\cos^3\beta}}$$

$$p = \frac{1}{\cos\beta}\sqrt[3]{\mathrm{sen}\,\beta} \Rightarrow p = \frac{\mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}$$

Y sustituyo en la E.D.O. original:

$$\cos^2\beta\left(\frac{\mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}\right)^3 - 2\alpha\,\frac{\mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta} + 2\tan\beta = 0$$

Universidad de Antioquia Depto. de Matematicas

$$\cos^2\beta\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos^3\beta} - 2\alpha\,\frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta} + 2\tan\beta = 0$$

$$\tan\beta - 2\alpha\,\frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta} + 2\tan\beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3\tan\beta}{\frac{2\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}} = \frac{3}{2}\frac{\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{\frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}} = \frac{3}{2}\operatorname{sen}^{\frac{2}{3}}\beta$$

Siendo esta última la solución singular.

Resolver por el método anterior los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $x = y + \ln p$
(**Rta.:** $x = y + \ln|1 + \frac{C}{e^y}|$)

Ejercicio 2. $4p^2 = 25x$
(**Rta.:** $(3y + c)^2 = 25x^3$)

Ejercicio 3. $2px = 2\tan y + p^3\cos^2 y$
(**Rta.:** $x = \frac{\operatorname{sen} y}{c} + \frac{c^2}{2}, \quad 8x^3 = 27\operatorname{sen}^2 y$)

Ejercicio 4. $4px - 2y = p^3y^2$
(**Rta.:** $4c\frac{x}{y} - 2y = \frac{c^3}{y};\ 4x = 3y^{\frac{4}{3}}$)

Ecuación de Clairaut: $y = xy' + f(y')$
Por el método del caso ii) se muestra que su solución general es de la forma:
$y = cx + f(c)$
Y su solución singular se consigue eliminando p entre las ecuaciones
$x + f'(p) = 0$ y $y = xp + f(p)$

Ejercicio 5. $y = xy' - \frac{(y')^3}{3}$
(**Rta.:** $y = cx - \frac{1}{3}c^3, \quad y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$)

Ejercicio 6. $y = xy' + 1 - \ln y'$
(**Rta.:** $y = cx + 1 - \ln c, \quad y = 2 + \ln x$)

Ejercicio 7. $xy' - y = e^{y'}$
(**Rta.:** $y = cx - e^c, \quad y = x\ln x - x$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejercicio 8. $(y - px)^2 = 4p$

Ejercicio 9. $y^2(y')^3 - 4xy' + 2y = 0$

2.9. OTRAS SUSTITUCIONES

Ejemplo 17. $y\,dx + (1 + ye^x)\,dy = 0$
Solución:
Hagamos

$$u = 1 + ye^x \Rightarrow y = \frac{u-1}{e^x}, \quad du = ye^x\,dx + e^x\,dy = e^x(y\,dx + dy),$$

$$\Rightarrow du = (u-1)\,dx + e^x\,dy$$

$$\Rightarrow dy = \frac{du - (u-1)\,dx}{e^x}$$

Reemplazando en la ecuación original:

$$\frac{u-1}{e^x}dx + u\left(\frac{du - (u-1)\,dx}{e^x}\right) \overset{e^x>0}{=} 0$$

$$(u - 1 - u(u-1))\,dx + u\,du = 0$$

$$(u-1)(1-u)\,dx + u\,du = 0$$

$$-(u-1)^2\,dx + u\,du = 0$$

$$dx = \frac{u}{(u-1)^2}\,du$$

$$x = \int \frac{u}{(u-1)^2}\,du + C$$

Utilicemos fracciones parciales para resolver la integral

$$\frac{u}{(u-1)^2} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{(u-1)^2}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$u = A(u-1) + B$$

$$\text{si } \ u = 1 \Rightarrow B = 1$$

$$\text{si } \ u = 0 \Rightarrow 0 = -A + 1 \Rightarrow A = 1$$

$$x = \int \left(\frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2} \right) du$$

$$x = \ln|u-1| + \int \frac{dv}{v^2}, \ \text{ haciendo } \ v = u - 1 \Rightarrow dv = du$$

$$\text{entonces } \ x = \ln|u-1| - \frac{1}{v} + C$$

$$x = \ln|ye^x| - \frac{1}{ye^x} + C, \ \text{ es la solución general}$$

Ejemplo 18. $y'' + 2y(y')^3 = 0$.
<u>Solución</u>:

$$\text{Hagamos } \ p = y' = \frac{dy}{dx}, \quad \Rightarrow p' = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$p' + 2yp^3 = 0$$

$$\frac{dp}{dx} + 2yp^3 = 0$$

Por la regla de la cadena sabemos que: $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p = p\frac{dp}{dy}$, entonces

$$p\,\frac{dp}{dy} + 2yp^3 = 0, \ \text{ con } \ p \neq 0$$

$$\frac{dp}{dy} + 2yp^2 = 0$$

$$\frac{dp}{dy} = -2yp^2 \Rightarrow p^{-2}dp = -2y\,dy$$

$$\Rightarrow -p^{-1} = -y^2 + C$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$p^{-1} = y^2 + C_1 \Rightarrow p = \frac{1}{y^2 + C_1} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow dx = (y^2 + C_1)\, dy$$

$$x = \frac{y^3}{3} + C_1 y + C_2$$

Hacer una sustitución adecuada para resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $xe^{2y}\frac{dy}{dx} + e^{2y} = \frac{\ln x}{x}$
(**Rta.:** $x^2e^{2y} = 2x\ln x - 2x + c$)

Ejercicio 2. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x}y = 2x^5 e^{\frac{y}{x^4}}$
(**Rta.:** $-e^{-\frac{y}{x^4}} = x^2 + c$)

Ejercicio 3. $2yy' + x^2 + y^2 + x = 0$
(**Rta.:** $x^2 + y^2 = x - 1 + ce^{-x}$)

Ejercicio 4. $y^2y'' = y'$
(**Rta.:**$\frac{y}{c} + \frac{1}{c^2}\ln|cy - 1| = x + c_1, y = k$)

Ejercicio 5. $2x\csc 2y\frac{dy}{dx} = 2x - \ln(\tan y)$
(**Rta.:** $\ln(\tan y) = x + cx^{-1}$)

Ejercicio 6. $y'' + (\tan x)y' = 0$
(**Rta.:** $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2$)

Ejercicio 7. $y' + 1 = e^{-(x+y)}\operatorname{sen} x$
(**Rta.:** $e^y = -e^{-x}\cos x + ce^{-x}$)

Ejercicio 8. $\frac{dy}{dx} + xy^3 \sec\frac{1}{y^2} = 0$
(**Rta.:** $x^2 - \operatorname{sen}\frac{1}{y^2} = c$)

Ejercicio 9. $dy - y\operatorname{sen} x\ dx = y\ln(ye^{\cos x})\ dx$
(**Rta.:** $\ln(\ln|ye^{\cos x}|) = x + C$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejercicio 10. $yy' + xy^2 - x = 0$
(**Rta.:** $y^2 = 1 + Ce^{-x^2}$)

Ejercicio 11. $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$
(**Rta.:** $\ln|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$)

Ejercicio 12. $x^2y'' - 2xy' - (y')^2 = 0$
(**Rta.:** $\frac{x^2}{2} + Cx + C^2 \ln|C - x| = -y + C_1$)

Ejercicio 13. $yy'' - y^2y' - (y')^2 = 0$
(**Rta.:** $\frac{1}{C} \ln|\frac{y}{y+C}| = x + C_1$)

Ejercicio 14. $\frac{dy}{dx} + e^{\frac{y}{x}} = \frac{y}{x}$
(**Rta.:** $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$)

Ejercicio 15. $\frac{dy}{dx} = \cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$
(**Rta.:** $\sec\frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} = Cx$)

Ejercicio 16. La E.D.

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

se le llama ecuación de Ricatti. Suponiendo que se conoce una solución particular $y_1(x)$ de esta ecuación, entonces demostrar que la sustitución $y = y_1 + \frac{1}{u}$, transforma la ecuación de Ricatti en la E.D. lineal en u de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + (B(x) + 2A(x)y_1)u = -A(x)$$

Hallar la solución: a) $y' + y^2 = 1 + x^2$, b) $y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$
(**Rta.:** b) $y = x + (C - x)^{-1}$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

2.10. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Como con el paquete matemático Maple se pueden resolver Ecuaciones Diferenciales, expondremos a continuación varios ejemplos, los cuales solucionaremos utilizando dicho paquete. Las instrucciones en Maple terminan con punto y coma, después de la cual se da "enter" para efectuar la operación

que se busca.

Ejemplo 19. Hallar la solución general de la E.D. $\frac{dy}{dx} = 3\frac{y}{x}$

```
>int(1/y,y)=int(3/x,x)+C;
                          ln(y) = 3 ln(x) + C
>solve(ln(y) = 3*ln(x)+C,y);

                                    2
                          exp(C) x
```

Ejemplo 20. Hallar la solución particular de la E.D. $\frac{dy}{dx} = xy(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, con la condición inicial $y(1) = 1$

```
> restart;

> diff_eq1 := D(y)(x)=x*y(x)^3*(1+x^2)^(-1/2);
```

diff_eq1 $:= D(y)(x) = \frac{xy(x)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$

```
> init_con := y(0)=1;
```

init_con $:= y(0) = 1$

```
> dsolve( {diff_eq1, init_con} , {y(x)} );
```

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{-2\sqrt{1+x^2}+3}}$$

Ejemplo 21. Mostrar que la E.D. $(2xy^2 + ye^x)dx + (2x^2y + e^x - 1)dy = 0$ es exacta y hallar la solución general.

```
> M:=2*x*y^2+y*exp(x);
```

M$:= 4xy + e^x$

```
> N:=2*x^2*y+exp(x)-1;
```

N$:=2x^2y + e^x - 1$

```
> diff_E1:=2*x*(y^2)(x)+y(x)*exp(x)+(2*x^2*y(x)+exp(x)-1)*D(y)(x)=0;
```

diff_E1 $:= 2xy(x)^2 + y(x)e^x + (2x^2y(x) + e^x - 1)D(y)(x) = 0$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

```
> dsolve(diff_E1,y(x));
```

$$y(x) = \frac{1}{2}\frac{1 - e^x - \sqrt{(e^x)^2 - 2e^x + 1 - 4x^2C1}}{x^2},$$
$$y(x) = \frac{1}{2}\frac{1 - e^x + \sqrt{(e^x)^2 - 2e^x + 1 - 4x^2C1}}{x^2}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

CAPÍTULO 3

APLICACIONES DE LAS E.D. DE PRIMER ORDEN

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

3.1. APLICACIONES GEOMÉTRICAS

3.1.1. Trayectorias Isogonales y Ortogonales

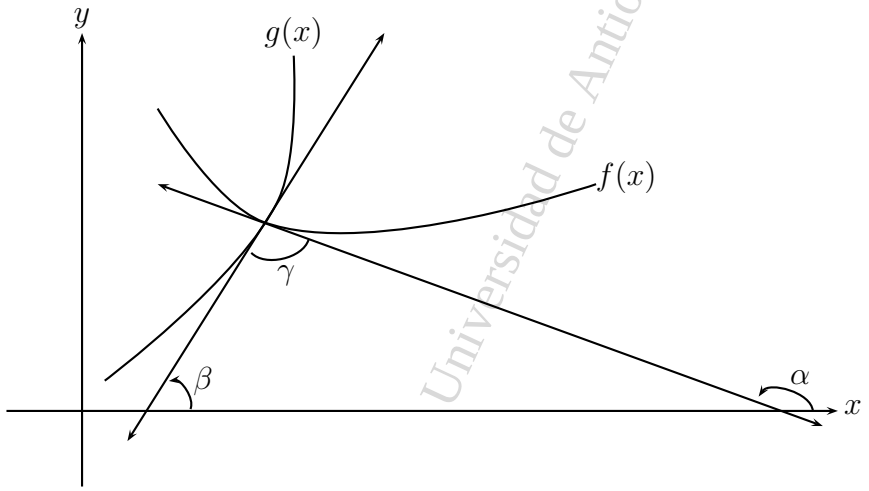


Figura 3.1

En la figura 3.1 se tiene que $\alpha = \beta + \gamma$, luego $\gamma = \alpha - \beta$, donde γ es el ángulo formado por las tangentes en el punto de intersección.

Definición 3.1 (**Trayectorias Isogonales**).

a). Dada una familia de curvas $f(x,y,c) = 0$, existe otra familia $g(x,y,c) = 0$ que corta a la familia f bajo un mismo ángulo γ. A la familia g se le llama la familia de trayectorias isogonales de f y $g(x,y,c) = 0$ es solución de la E.D.:

$$\tan\gamma = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{f'(x)-g'(x)}{1+f'(x)g'(x)} = \frac{f'(x)-y'}{1+f'(x)y'}$$

b). En particular, cuando $\gamma = 90^0$, a g se le llama la familia de trayectorias ortogonales de f y en este caso g es solución de la E.D.:

$$\tan\alpha\tan\beta = f'(x)g'(x) = -1 = f'(x)y'$$

Ejemplo 1. Hallar las trayectorias isogonales a 45° de la familia $y(x+c) = 1$.
<u>Solución</u>:

$$\tan 45^0 = \frac{f'(x)-y'}{1+f'(x)y'} = 1$$

por derivación implícita:

$$\frac{d}{dx}\left(y(x+c)\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$y + (x+c)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+c}$$

En la E.D.:

$$1 = \frac{-\frac{y}{x+c} - y'}{1+\left(-\frac{y}{x+c}\right)y'} = \frac{\frac{-y}{\frac{1}{y}} - y'}{1+\left(-\frac{y}{\frac{1}{y}}\right)y'} = \frac{-y^2-y'}{1-y^2y'}$$

$$1 - y^2y' = -y^2 - y' \Rightarrow y'(y^2-1) = 1+y^2$$

$$y' = \frac{y^2+1}{y^2-1} \Rightarrow \frac{y^2-1}{y^2+1}\,dy = dx$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

$$\left(1 - \frac{2}{1+y^2}\right) dy = dx$$

$$y - 2\tan^{-1} y = x + K$$

$$g(x, y, K) = 0 = y - 2\tan^{-1} y - x - K$$

Ejercicio 1. Hallar las trayectorias isogonales a 45° de la familia $y = ce^{ax}$, donde c y a son constantes.
(**Rta.:** $y + \frac{2}{a}\ln|ay - 1| = x + c$)

Ejercicio 2. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia $y^2 = cx^3$.
(**Rta.:** $2x^2 + 3y^2 = C_2$)

Ejercicio 3. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de hipérbolas equiláteras $xy = c$.
(**Rta.:** $x^2 - y^2 = C$)

Ejercicio 4. Determinar la curva que pasa por $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ y corta a cada miembro de la familia $x^2 + y^2 = c^2$ formando un ángulo de 60°.
(**Rta.:** $\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{x}{y} = \pm\frac{1}{2}\ln|x^2 + y^2| + \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$)

Ejercicio 5. Hallar la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = C_1x^2$.
(**Rta.:** $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$)

Ejercicio 6. Hallar la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = C_1e^{-x}$.
(**Rta.:** $\frac{y^2}{2} = x + C$)

Ejercicio 7. Encuentre la curva que pertenece a la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x + y = C_1e^y$ que pasa por $(0, 5)$.
(**Rta.:** $y = 2 - x + 3e^{-x}$)

3.1.2. Problemas de Persecución:

Ejemplo 2. Un esquiador acuático P localizado en el punto $(a, 0)$ es

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

remolcado por un bote de motor Q localizado en el orígen y viaja hacia arriba a lo largo del eje Y. Hallar la trayectoria del esquiador si este se dirige en todo momento hacia el bote.

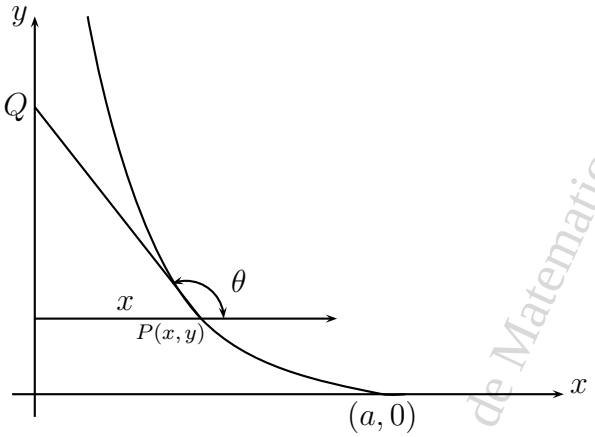


Figura 3.2

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Solución: del concepto geométrico de derivada se tiene que:

$$y' = \tan\theta = -\sqrt{\sec^2\theta - 1},$$

pero de la figura 3.2 y teniendo en cuenta que $PQ = a$, se tiene que

$$\sec\theta = -\frac{PQ}{x} = -\frac{a}{x}$$

por lo tanto,

$$y' = -\sqrt{\sec^2 - 1} = -\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}, \quad \text{donde} \quad x > 0,$$

separando variables:

$$dy = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}dx,$$

por medio de la sustitución trigonométrica $x = \operatorname{sen}\alpha$ en el lado derecho de la E.D., se llega a que:

$$y = a\ln\left[\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right] - \sqrt{a^2 - x^2} + C;$$

como el esquiador arranca desde el punto $(a, 0)$, entonces las condiciones iniciales son $x = a,\ y = 0$; sustituyendo en la solución general, se obtiene que $C = 0$.
Luego la solución particular es:

$$y = a \ln \left[\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right] - \sqrt{a^2 - x^2}$$

Ejercicio 1. Suponga que un halcón P situado en $(a, 0)$ descubre una paloma Q en el orígen, la cual vuela a lo largo del eje Y a una velocidad v; el halcón emprende vuelo inmediatamente hacia la paloma con velocidad w. ¿Cual es el camino seguido por el halcón en su vuelo persecutorio?
(**Rta.:** $y = \frac{a}{2} \left[\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{v}{w}}}{1+\frac{v}{w}} - \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{v}{w}}}{1-\frac{v}{w}} + c \right]$, donde $c = \frac{avw}{w^2 - v^2}$)

Ejercicio 2. Un destructor está en medio de una niebla muy densa que se levanta por un momento y deja ver un submarino enemigo en la superficie a cuatro kilómetros de distancia. Suponga:
i) que el submarino se sumerge inmediatamente y avanza a toda máquina en una dirección desconocida.
ii) que el destructor viaja tres kilómetros en línea recta hacia el submarino.
Qué trayectoria debería seguir el destructor para estar seguro que pasará directamente sobre el submarino, si su velocidad v es tres veces la del submarino?
(**Rta.:** $r = e^{\frac{\theta}{\sqrt{8}}}$)

Ejercicio 3. Suponga que el eje Y y la recta $x = b$ forman las orillas de un río cuya corriente tiene una velocidad v (en la dirección negativa del eje Y). Un hombre esta en el origen y su perro esta en el punto $(b, 0)$. Cuando el hombre llama al perro, éste se lanza al río y nada hacia el hombre a una velocidad constante w $(w > v)$. Cual es la trayectoria seguida por el perro?
(**Rta.:** $y = \frac{x}{2}[(\frac{x}{b})^{\frac{v}{w}} - (\frac{b}{x})^{\frac{v}{w}}]$)

Ejercicio 4. Demuestre que el perro del Ej. anterior nunca tocará la otra orilla si $w < v$.

Suponga ahora que el hombre camina río abajo a la velocidad v mientras llama a su perro. Podrá esta vez el perro tocar la otra orilla?
(**Rta.:** Sí, en el punto $(0, -\frac{bv}{w})$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejercicio 5. Cuatro caracoles situados en las esquinas de un cuadrado $[0, a] \times [0, a]$ comienzan a moverse con la misma velocidad, dirigiéndose cada uno hacia el caracol situado a su derecha. Qué distancia recorrerán los caracoles al encontrarse?
(**Rta.:** a unidades)

3.1.3. Aplicaciones a la geometría analítica

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de todas las curvas que tienen la propiedad de que el punto de tangencia es punto medio del segmento tangente entre los ejes coordenados.

<u>Solución</u>:

$\tan\alpha = f'(x) = -\frac{2y}{2x}$

$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|$

$\ln|y| = -\ln\left|\frac{c}{x}\right| \Rightarrow y = \frac{c}{x} \Rightarrow xy = c$

Ejercicio 1. Empleando coordenadas rectangulares hallar la forma del espejo curvado tal que la luz de una fuente situada en el origen se refleje en él como un haz de rayos paralelos al eje X.
(**Rta.:** $y^2 = 2cx + c^2$)

Ejercicio 2. Una curva pasa por el origen en el plano XY, al primer cuadrante. El área bajo la curva de $(0, 0)$ a (x, y) es un tercio del área del rectángulo que tiene esos puntos como vértices opuestos. Encuentre la ecuación de la curva.
(**Rta.:** $y = cx^2$)

Ejercicio 3. Encontrar las curvas para las cuales la tangente en un punto $P(x, y)$ tiene interceptos sobre los ejes X y Y cuya suma es $2(x + y)$
(**Rta.:** $xy = c$)

Ejercicio 4. Hallar la ecuación de todas las curvas que tienen la propiedad

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

de que la distancia de cualquier punto al origen, es igual a la longitud del segmento de normal entre el punto y el intercepto con el eje X.
(**Rta.:** $y^2 = \pm x^2 + c$)

Ejercicio 5. Hallar la ecuación de todas las curvas del plano XY que tienen la propiedad de que el triángulo formado por la tangente a la curva, el eje X y la recta vertical que pasa por el punto de tangencia siempre tiene un área igual a la suma de los cuadrados de las coordenadas del punto de tangencia.
(**Rta.:** $\ln|cy| = \frac{2}{\sqrt{15}}\tan^{-1}(\frac{4x-y}{\sqrt{15}y})$)

Ejercicio 6. Hallar la ecuación de todas las curvas del plano XY que tienen la propiedad de que la porción de la tangente entre (x, y) y el eje X queda partida por la mitad por el eje Y.
(**Rta.:** $y^2 = Cx$)

Ejercicio 7. Hallar la ecuación de todas las curvas del plano XY que tienen la propiedad de que la longitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente es igual a la abscisa del punto de contacto.
(**Rta.:** $x^2 + y^2 = Cx$)

Ejercicio 8. Hallar la ecuación de todas las curvas del plano XY que tienen la propiedad de que la razón del segmento interceptado por la tangente en el eje OY al radio vector, es una cantidad constante k.
(**Rta.:** $y = \frac{1}{2}(Cx^{1-k} - \frac{1}{C}x^{1+k})$)

Ejercicio 9. Hallar la ecuación de todas las curvas del plano XY para las cuales la longitud del segmento interceptado en el eje Y por la normal a cualquiera de sus puntos es igual a la distancia desde este punto al origen de coordenadas.
(**Rta.:** $y = \frac{1}{2}(Cx^2 - \frac{1}{C})$)

Universidad de Antioquia Depto. de Matemáticas

3.2. CRECIMIENTO Y DESCOMPOSICIÓN

Existen en el mundo físico, en biología, medicina, demografía, economía, etc. cantidades cuya rapidez de crecimiento o descomposición varía en forma proporcional a la cantidad presente, es decir, $\frac{dx}{dt} = kx$ con $x(t_0) = x_0$, o sea

que

$$\frac{dx}{dt} - kx = 0$$

que es una E.D. en variables separables o lineal en x de primer orden y cuya solución es $x = Ce^{kt}$

Como $x(t_0) = x_0 = Ce^{kt_0} \Rightarrow C = x_0 e^{-kt_0}$

Por lo tanto la solución particular es $x = x_0 e^{-kt_0} e^{kt} = x_0 e^{k(t-t_0)}$

En particular cuando $t_0 = 0$, entonces $x = x_0 e^{kt}$

3.2.1. Desintegración radioactiva

Si Q es la cantidad de material radioactivo presente en el instante t, entonces la E.D. es $\frac{dQ}{dt} = -kQ$, donde k es la constante de desintegración.

Se llama tiempo de vida media de un material radioactivo al tiempo necesario para que una cantidad Q_0 se trasforme en $\frac{Q_0}{2}$.

Ejercicio 1. Si T es el tiempo de vida media, mostrar que $Q = Q_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$.

Ejercicio 2. Suponga que un elemento radioactivo A se descompone en un segundo elemento radioactivo B y este a su vez se descompone en un tercer elemento radioactivo C. Si la cantidad de A presente inicialmente es x_0 y las cantidades de A y B son x e y respectivamente en el instante t y si k_1 y k_2 son las constantes de rapidez de descomposición, hallar y en función de t.
(**Rta.:** Si $k_1 \neq k_2$, entonces: $y = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$
si $k_1 = k_2$, entonces $y = k_1 x_0 t e^{-k_1 t}$)

Ejercicio 3. Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene $\frac{1}{1000}$ de la cantidad original de C_{14}. Determinar la edad del fósil, sabiendo que el tiempo de vida media del C_{14} es 5600 años.
(**Rta.:** $t \approx 55{,}800$ años)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

3.2.2. Ley de enfriamiento de Newton

Si se tiene un cuerpo a una temperatura T, sumergido en un medio de tamaño infinito de temperatura T_m (T_m no varía apreciablemente con el tiempo), el enfriamiento de este cuerpo se comporta de acuerdo a la siguiente E.D.: $\frac{d\theta}{dt} = -k\theta \quad \text{donde} \quad \theta = T - T_m$.

Ejercicio 3. Un cuerpo se calienta a $110^0\,C$ y se expone al aire libre a una temperatura de $10^0\,C$. Si al cabo de una hora su temperatura es de $60^0\,C$. ¿Cuánto tiempo adicional debe transcurrir para que se enfríe a $30^0\,C$? (**Rta.:** $t = \frac{\ln 5}{\ln 2}$)

3.2.3. Ley de absorción de Lambert

Esta ley dice que la tasa de absorción de luz con respecto a una profundidad x de un material translúcido es proporcional a la intensidad de la luz a una profundidad x; es decir, si I es la intensidad de la luz a una profundidad x, entonces $\frac{dI}{dx} = -kI$.

Ejemplo 4. En agua limpia la intensidad I a 3 pies bajo la superficie es de un 25 % de la intensidad I_0 en la superficie. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie?

<u>Solución</u>:

$$x = 0 \Rightarrow I = I_0$$

$$\frac{dI}{dx} = -kI \quad \Rightarrow \quad I = Ce^{-kx}$$

Cuando $x = 0$, $I = I_0 = C$

Luego

$$I = I_0\, e^{-kx}$$

Cuando

$$x = 3 \Rightarrow I = 0{,}25\, I_0$$

luego,

$$0{,}25\, I_0 = I_0\, e^{-3k}$$

$$\Rightarrow e^{-k} = (0{,}25)^{\frac{1}{3}}$$

Universidad de Antioquia Depto de Matemáticas

$$I = I_0(e^{-k})^x = I_0((0{,}25)^{\frac{1}{3}})^x = I_0(0{,}25)^{\frac{x}{3}}$$

para

$$x = 15 \Rightarrow I = I_0(0{,}25)^{\frac{15}{3}}$$

por tanto

$$I = I_0(0{,}25)^5$$

Ejercicio 4. Si I a una profundidad de 30 pies es $\frac{4}{9}$ de la intensidad en la superficie; encontrar la intensidad a 60 pies y a 120 pies.

3.2.4. Crecimientos poblacionales

La razón de crecimiento depende de la población presente en periodo de procrear, considerando las tasas de natalidad y de muerte, el modelo que representa dicha situación es:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

donde $Q(t)$: población en el instante t.

Ejercicio 5. Si en un análisis de una botella de leche se encuentran 500 organismos (bacterias), un día después de haber sido embotelladas y al segundo día se encuentran 8000 organismos. ¿Cual es el número de organismos en el momento de embotellar la leche?

Ejercicio 6. En un modelo de evolución de una comunidad se supone que la población $P(t)$ se rige por la E.D $\frac{dP}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt}$, donde $\frac{dB}{dt}$ es la rapidez con que nace la gente y $\frac{dD}{dt}$ es la rapidez con que la gente muere.
Hallar: a) $P(t)$ si $\frac{dB}{dt} = k_1 P$ y $\frac{dD}{dt} = k_2 P$

b) Analizar los casos en que $k_1 > k_2$, $k_1 = k_2$ y $k_1 < k_2$

Ejercicio 7. Una persona de un pueblo de 1000 habitantes regresó con gripa. Si se supone que la gripa se propaga con una rapidez directamente proporcional al número de agripados como también al número de no agripados. Determinar el número de agripados cinco días después, si se observa que el número de agripados el primer día es 100.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejercicio 8. Cuando se produce cierto alimento, se estima en N el número de organismos de una cierta clase presentes en el paquete. Al cabo de 60 dias el número N ha aumentado a $1000N$. Sinembargo, el número $200N$ es considerado como el límite saludable. A los cuantos dias, después de elaborado, vence el alimento.
(**Rta.:** 46.02 dias)

Observación: un modelo más preciso para el crecimiento poblacional es suponer que la tasa per cápita de crecimiento, es decir $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$ es igual a la tasa promedio de nacimientos, la cual supondremos constante, menos la tasa promedio de defunciones, la cual supondremos proporcional a la población, por lo tanto la E.D. sería:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = b - aP$$

donde a y b son constantes positivas. Esta E.D. se le llama **ecuación logística**.
Resolviendo esta E.D. por variables separables se obtiene

$$|\frac{P}{b-aP}| = e^c e^{bt}$$

Si en $t = 0$ se tiene $P = P_0$ entonces la solución particular es

$$P(t) = \frac{bP_0e^{bt}}{b - aP_0 + aP_0e^{bt}}$$

Por la regla de l'Hôpital se puede mostrar que

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{b}{a}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

3.3. PROBLEMAS DE DILUCIÓN

Una solución es una mezcla de un soluto (que puede ser líquido, sólido o gaseoso), en un solvente que puede ser líquido o gaseoso.

Tipos de mezclas o soluciones :

i) Soluciones líquidas cuando disolvemos un sólido o un líquido en un líquido.

ii) Soluciones gaseosas cuando se disuelve un gas en un gas.

<u>Ecuación de Continuidad</u>:

Tasa de acumulación = Tasa de entrada − Tasa de salida.

Caso 1. Una Salmuera (solución de sal en agua), entra en un tanque a una velocidad v_1 galones de salmuera/minuto y con una concentración de c_1 libras de sal por galón de salmuera (lib. sal/gal. salmuera).
Inicialmente el tanque tiene Q galones de salmuera con P libras de sal disueltas. La mezcla bien homogenizada abandona el tanque a una velocidad de v_2 galones de salmuera/min.
Encontrar una ecuación para determinar las libras de sal que hay en el tanque en cualquier instante t.(Ver figura 3.3)

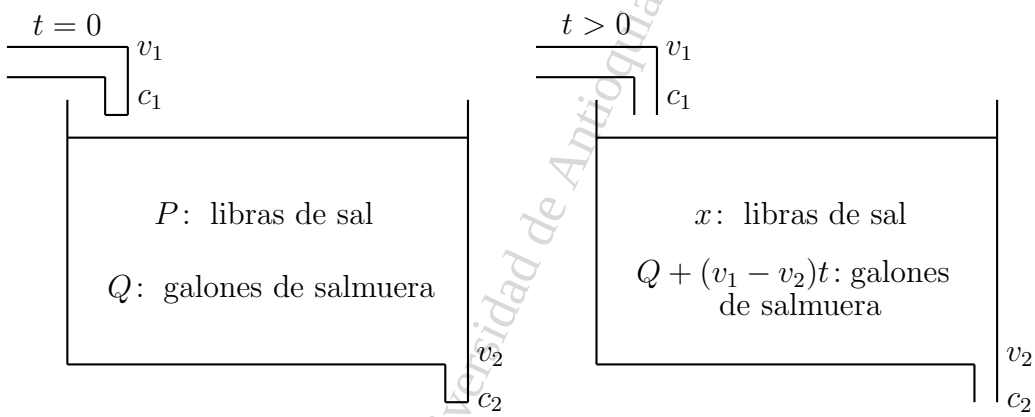


Figura 3.3

Sea $x(t)$ las libras de sal en el instante t.

$$\frac{dx}{dt} = \text{ Tasa de acumulación } =$$
$$= \text{Tasa de entrada del soluto} - \text{Tasa de salida del soluto.}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_1\,(\text{gal.sol./min})\;c_1\,(\text{lib.sal/gal.sol.}) - \;v_2\,(\text{gal.sol./min})\;c_2(\text{lib.sal/gal.sol.})\\ &= v_1c_1 - v_2\frac{x}{Q+(v_1-v_2)t}\end{aligned}$$

y obtenemos la E.D. lineal en x de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} + \overbrace{\frac{v_2}{Q+(v_1-v_2)t}}^{p(t)}\,x = \underbrace{v_1c_1}_{q(t)}$$

condiciones iniciales: $t=0, \quad x=P$

$$p(t) = \frac{v_2}{Q+(v_1-v_2)t}; \quad q(t) = v_1c_1$$

$$\begin{aligned}F.I. = e^{\int p(t)\,dt} = e^{\int v_2\frac{1}{Q+(v_1-v_2)t}} &= \\ = e^{\frac{v_2}{v_1-v_2}\ln|Q+(v_1-v_2)t|}\end{aligned}$$

$$F.I. = [Q+(v_1-v_2)t]^{\frac{v_2}{v_1-v_2}}$$

luego

$$x\;F.I. = \int F.I.\;q(t)\;dt + C$$

con las condiciones iniciales $x(0)=P$, hallamos C y se concluye que $x=f(t)$

Ejercicio 1: resolver la anterior E.D. con $v_1 = v_2$

Caso 2. Un colorante sólido disuelto en un líquido no volátil, entra a un tanque a una velocidad v_1 galones de solución/minuto y con una concentración de c_1 libras de colorante/galón de solución. La solución bien homogenizada sale del tanque a una velocidad de v_2 galones de solución/min. y entra a un segundo tanque del cual sale posteriormente a una velocidad de v_3 galones de solución/min.
Inicialmente el primer tanque tenía P_1 libras de colorante disueltas en Q_1 galones de solución y el segundo tanque P_2 libras de colorante disueltas en Q_2 galones de solución. Encontrar dos ecuaciones que determinen las libras de colorante presentes en cada tanque en cualquier tiempo t.(Ver figura 3.4)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

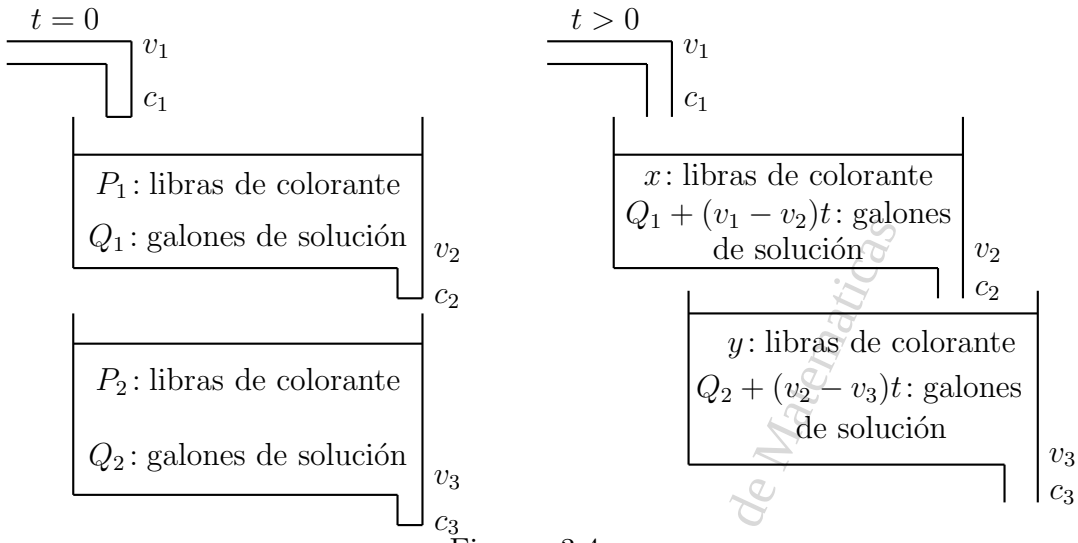


Figura 3.4

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

$x =$ libras de colorante en el primer tanque en el instante t.
$y =$ libras de colorante en el segundo tanque en el instante t.

E.D. para el primer tanque:

$$\frac{dx}{dt} = v_1c_1 - v_2c_2 = v_1c_1 - v_2\frac{x}{Q_1+(v_1-v_2)t}$$

$\frac{dx}{dt} + v_2\frac{x}{Q_1+(v_1-v_2)t} = v_1c_1$, con la condición inicial $t = 0,\ x = P_1$

La solución es: $x = f(t) = c_1[Q_1 + (v_1 - v_2)t] + C[Q_1 + (v_1 - v_2)t]^{-\frac{v_2}{v_1-v_2}}$.

E.D. para el segundo tanque:

$$\frac{dy}{dt} = v_2c_2 - v_3c_3 = v_2\frac{x}{Q_1+(v_1-v_2)t} - v_3\frac{y}{Q_2+(v_2-v_3)t}$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{v_3}{Q_2+(v_2-v_3)t}\,y = \frac{v_2}{Q_1+(v_1-v_2)t}\,x = \frac{v_2}{Q_1+(v_1-v_2)t}\,f(t), \quad t = 0,\ y = P_2$$

$F.I. = [Q_2 + (v_2 - v_3)t]^{\frac{v_3}{v_2-v_3}}$ para $v_2 \neq v_3$.

Si $v_2 = v_3$ ¿Cual sería su factor integrante?

Ejercicio 2. Resolver el caso dos cuando $v_1 = v_2 = v_3 = v$ y $Q_1 = Q_2 = Q$.

Caso 3. Una solución líquida de alcohol en agua, está constantemente circulando entre dos tanques a velocidades v_2 y v_3 galones/minuto. Si al primer tanque también entra una solución a una velocidad de v_1 galones /minuto y de concentración c_1 galones de alcohol/galón de solución y las cantidades iniciales en los tanques son P_1 y P_2 galones de alcohol en Q_1 y Q_2 galones de agua respectivamente. Encontrar dos ecuaciones para determinar los galones de alcohol presentes en cualquier tiempo en cada tanque (Ver figura 3.5).

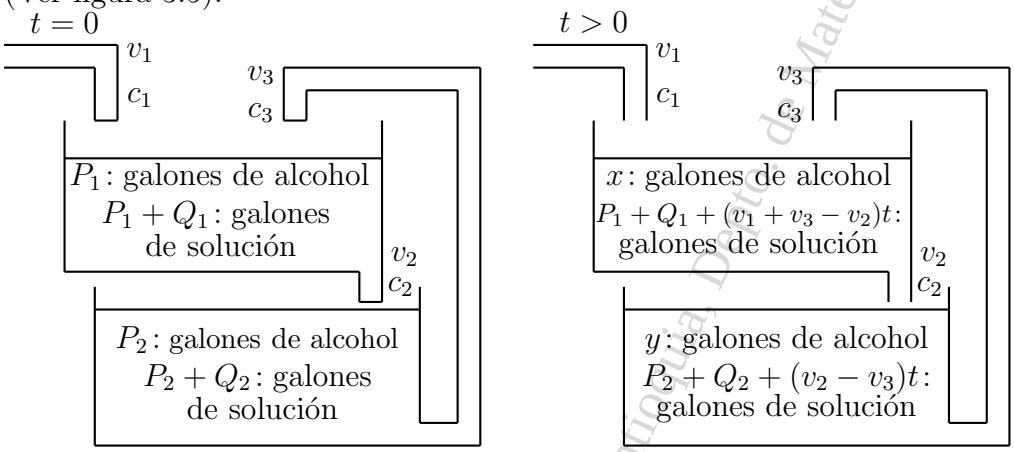


Figura 3.5

$x =$ galones de alcohol en el primer tanque en el instante t.
$y =$ galones de alcohol en el segundo tanque en el instante t.

E.D. para el primer tanque:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_1c_1 + v_3c_3 - v_2c_2\\ &= v_1c_1 + v_3\frac{y}{Q_2 + P_2 + (v_2 - v_3)t} - v_2\frac{x}{Q_1 + P_1 + (v_1 + v_3 - v_2)t}\end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{v_2}{Q_1 + P_1 + (v_1 + v_3 - v_2)t}\,x = \frac{v_3}{Q_2 + P_2 + (v_2 - v_3)t}\,y + v_1c_1 \quad (3.1)$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

E.D. para el segundo tanque:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v_2c_2 - v_3c_3\\ &= \frac{v_2}{Q_1+P_1+(v_1+v_3-v_2)t}x - \frac{v_3}{Q_2+P_2+(v_2-v_3)t}y \qquad (3.2)\end{aligned}$$

<u>Balance total</u>: galones de alcohol presentes en los dos tanques en el instante t:

$$\text{Bal.tot.}= x+y = P_1+P_2+v_1\,(\text{gal.sol./min})\;c_1\;\;(\text{gal.alcohol/gal.sol.})\,t$$

$$x+y = P_1+P_2+v_1c_1t$$

luego

$$y = P_1+P_2+v_1c_1t-x \qquad (3.3)$$

(3.3) en (3.1):

$$\frac{dx}{dt}+\frac{v_2}{Q_1+P_1+(v_1+v_3-v_2)t}x = \frac{v_3}{Q_2+P_2+(v_2-v_3)t}(P_1+P_2+v_1c_1t-x)+v_1c_1$$

$$\frac{dx}{dt}+\left(\frac{v_2}{Q_1+P_1+(v_1+v_3-v_2)t}+\frac{v_3}{Q_2+P_2+(v_2-v_3)t}\right)x = \frac{(P_1+P_2+v_1c_1t)v_3}{Q_2+P_2+(v_2-v_3)t}+v_1c_1 \qquad (3.4)$$

Con la condición inicial: $t=0,\ x=P_1$

Nota: no hay necesidad de resolver la ecuación diferencial (3.2) porque $y = P_1+P_2+v_1c_1t-x$.

Caso 4. Un teatro de dimensiones $10\times 30\times 50\,\text{mt.}^3$, contiene al salir el público 0,1 % por volumen de CO_2. Se sopla aire fresco a razón de 500 mt.^3 por minuto y el sistema de aire acondicionado lo extrae a la misma velocidad.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

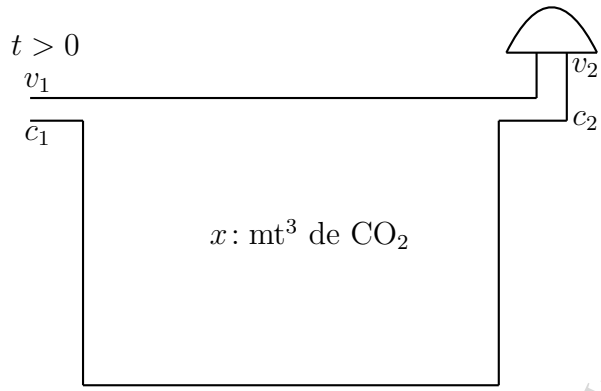


Figura 3.6

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Si el aire atmosférico tiene un contenido de CO_2 del 0,04 % por volumen y el límite saludable es de 0,05 % por volumen. ¿ En que tiempo podrá entrar el público? (Ver figura 3.6)

Sea $x =$ mt.^{3} de CO_2 presentes en el teatro en el instante t.

Cantidad de CO_2 en el teatro en $t = 0$:

$$0{,}001\frac{\text{mt.}^3\text{de}CO_2}{\text{mt.}^3\,\text{de aire}} \times 10 \times 30 \times 50\text{mt.}^3 = 15\text{mt.}^3$$

Por la ecuación de continuidad, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_1c_1 - v_2c_2 = \\ &= 500\text{mt.}^3\,\text{aire/min.} \times \frac{0{,}04}{100}\text{mt.}^3\,CO_2/\text{mt.}^3\,\text{aire} \\ &\quad - 500\text{mt.}^3\,\text{aire/min.} \times \frac{x\,\text{mt.}^3CO_2}{10 \times 30 \times 50\,\text{mt.}^3\,\text{aire}} \\ &= 0{,}2 - \frac{x}{30}\end{aligned}$$

por tanto, $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{30} = 0{,}2$, E.D. lineal de primer orden con $p(t) = \frac{1}{30}$ y $Q(t) = 0{,}2$

Solución general: $x = 6 + Ce^{-\frac{t}{30}}$.
Condiciones iniciales: en $t = 0$ se tiene que $x = 15$,
por tanto la solución particular es:

$$x = 6 + 9e^{-\frac{t}{30}}.$$

La cantidad de CO_2 en el límite saludable es:

$$x = \frac{0{,}05}{100} \times 10 \times 30 \times 50 = 7{,}5,$$

por tanto $7{,}5 = 6 + 9e^{-\frac{t}{30}}$ y despejando t se tiene que $t = 30 \ln 6 = 53{,}75$min.

Ejercicio 1. En un tiempo $t = 0$ un tanque A contiene 300 galones de salmuera en el cual hay 50 libras de sal y un tanque B con 200 galones de agua pura. Al tanque A le entran 5 galones de agua/min. y la salmuera sale a la misma velocidad para entrar al tanque B y de este pasa nuevamente al tanque A, a una velocidad de 3 gal/min.
Calcular las cantidades de sal en ambos tanques en un tiempo $t = 1$hora $=$ 60min..
(**Rta.:** tanque $A = 29{,}62$ libras, tanque $B = 20{,}31$ libras)

Ejercicio 2. Un tanque tiene inicialmente 100 galones de agua pura. Una salmuera que contiene $\frac{1}{2}$ libra de sal/galón de salmuera fluye al interior del tanque a una rapidez de 2 galones/min. y la mezcla bien homogenizada sale del tanque con la misma velocidad. Después de 10 minutos el proceso se detiene y se introduce al tanque agua pura con una rapidez de 2 galones/min, abandonando el tanque a la misma velocidad.
Determinar la cantidad de sal en el tanque cuando han pasado un total de 20 minutos.
(**Rta.:** 7,34 libras)

Ejercicio 3. Un tanque contiene 100 galones de salmuera; 3 galones de salmuera la cual contiene 2 libras de sal/galón de salmuera entran al tanque cada minuto.
La mezcla asumida uniforme sale a una velocidad de 2 gal/min. Si la concentración es de 1,8 libras de sal/galón de salmuera al cabo de 1 hora, Calcular las libras de sal que habían inicialmente en el tanque.
(**Rta.:** 118,08 libras)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejercicio 4. Un depósito contiene 50 galones de salmuera en las que están disueltas 25 libras de sal. Comenzando en el tiempo $t = 0$, entra agua al depósito a razón de 2 gal./min. y la mezcla sale al mismo ritmo para entrar a un segundo depósito que contenía inicialmente 50 galones de agua pura.La salmuera sale de este depósito a la misma velocidad.Cuándo contendrá el segundo depósito la mayor cantidad de sal?
(**Rta.:** cuando $t \geq 25$ minutos)

Ejercicio 5. Un tanque contiene inicialmente agua pura. Salmuera que contiene 2 libras de sal/gal. entra al tanque a una velocidad de 4 gal./min. Asumiendo la mezcla uniforme, la salmuera sale a una velocidad de 3 gal./min. Si la concentración alcanza el 90 % de su valor máximo en 30 minutos, calcular los galones de agua que habían inicialmente en el tanque.
(**Rta.:** $Q = \frac{30}{\sqrt[4]{10}-1}$)

Ejercicio 6. El aire de un teatro de dimensiones $12 \times 8 \times 4$ mt.^{3} contiene 0,12 % de su volumen de CO_2. Se desea renovar en 10 minutos el aire, de modo que llegue a contener solamente el 0,06 % de CO_2. Calcular el número de mt.^{3} por minuto que deben renovarse, suponiendo que el aire exterior contiene 0,04 % de CO_2.
(**Rta.:** 53,23 mt.^{3} de aire/minuto)

Ejercicio 7. Aire que contiene 30 % de oxígeno puro pasa a través de un frasco que contiene inicialmente 3 galones de oxígeno puro. Suponiendo que la velocidad de entrada es igual a la de salida; hallar la cantidad de oxígeno existente después de que 6 galones de aire han pasado por el frasco.
(**Rta.:** 1,18 galones)

Ejercicio 8. Un tanque contiene 50 litros de agua. Al tanque entra salmuera que contiene k gramos de sal por litro, a razón de 1.5 litros por minuto. La mezcla bien homogenizada, sale del tanque a razón de un litro por minuto. Si la concentración es 20 gr/litro al cabo de 20 minutos. Hallar el valor de k.
(**Rta.:** $k = 47{,}47$)

Ejercicio 9. Un tanque contiene 500 galones de salmuera. Al tanque fluye salmuera que contiene 2 libras de sal por galón, a razón de 5 galones por minuto y la mezcla bien homogenizada, sale a razón de 10 galones por

Universidad de Antioquia Dep. de Matemáticas

minuto. Si la cantidad máxima de sal en el tanque se obtiene a los 20 minutos. Cual era la cantidad de sal inicial en el tanque?
(**Rta.:** 375 libras)

Ejercicio 10. Un tanque contiene 200 litros de una solución de colorante con una concentración de 1 gr/litro. El tanque debe enjuagarse con agua limpia que entra a razón de 2 litros/min. y la solución bien homogénizada sale con la misma rapidez. Encuentre el tiempo que trascurrirá hasta que la concentración del colorante en el tanque alcance el 1 % de su valor original.
(**Rta.:** 460.5 min.)

3.4. VACIADO DE TANQUES

Un tanque de una cierta forma geométrica está inicialmente lleno de agua hasta una altura H. El tanque tiene un orificio en el fondo cuya área es A pie^2. Se abre el orificio y el líquido cae libremente. La razón volumétrica de salida $\frac{dQ}{dt}$ es proporcional a la velocidad de salida y al área del orificio, es decir,

$$\frac{dQ}{dt} = -kAv,$$

aplicando la ecuación de energía: $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$, por lo tanto,

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh}$$

donde $g = 32$ pie/seg$^2 = 9{,}81$ mt./seg.^{2}

La constante k depende de la forma del orificio:

- Si el orificio es de forma rectangular, la constante $k = 0{,}8$.
- Si el orificio es de forma triangular, la constante $0{,}65 \leq k \leq 0{,}75$.
- Si el orificio es de forma circular, la constante $k = 0{,}6$.

Caso 1. Cilíndro circular de altura H_0 pies y radio r pies, dispuesto en forma vertical y con un orificio circular de diámetro ϕ'' (pulgadas) (Ver figura 3.7).

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

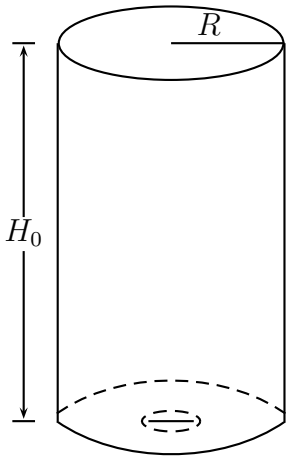


Figura 3.7

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -0{,}6\pi\left(\frac{\phi}{24}\right)^2\sqrt{2\times 32\times h} = -4{,}8\pi\frac{\phi^2}{576}\sqrt{h} \tag{3.5}$$

pero

$$dQ = \pi r^2\,dh \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \pi r^2\,\frac{dh}{dt} \tag{3.6}$$

Como (3.5)= (3.6): $\pi r^2\frac{dh}{dt} = -\frac{4{,}8\pi}{576}\phi^2\sqrt{h}$

y separando variables:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{4{,}8}{576r^2}\,\phi^2\,dt$$

$$h^{-\frac{1}{2}}\,dh = -\frac{4{,}8}{576r^2}\,\phi^2\,dt$$

e integrando: $2\sqrt{h} = -\frac{4{,}8}{576r^2}\phi^2\,t + C$.

Con las condiciones iniciales: $t = 0,\ h = H_0$, hallamos la constante C.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

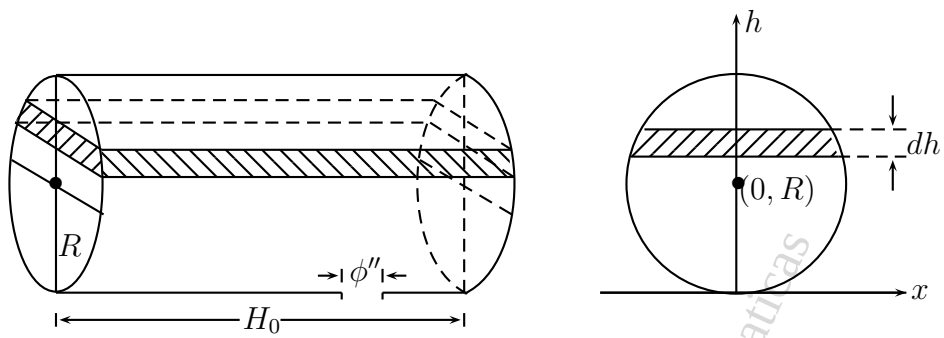


Figura 3.8

El tiempo de vaciado (t_v): se obtiene cuando $h = 0$. Hallar t_v

Caso 2. El mismo cilíndro anterior pero dispuesto horizontalmente y con el orificio en el fondo (Ver figura 3.8).

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh} = -\frac{4{,}8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h} \tag{3.7}$$

pero de la figura 3.8, tenemos:

$$dQ = 2x \times H_0 \times dh$$

y también

$$(x-0)^2 + (h-r)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + h^2 - 2rh + r^2 = r^2$$

luego

$$x = \sqrt{2rh - h^2}$$

sustituyendo

$$dQ = 2\sqrt{2rh - h^2}\, H_0\, dh$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

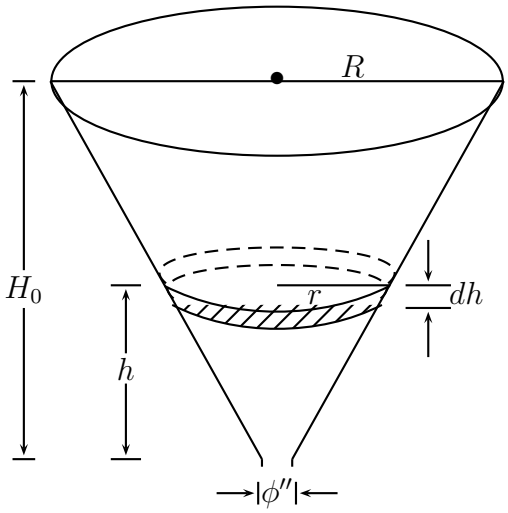


Figura 3.9

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 2H_0\sqrt{2rh-h^2}\,\frac{dh}{dt} \tag{3.8}$$

(3.8) = (3.7):

$$\begin{aligned}
2H_0\sqrt{2rh-h^2}\,\frac{dh}{dt} &= -\frac{4{,}8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h}\\
2H_0\sqrt{h}\sqrt{2r-h}\,\frac{dh}{dt} &= -\frac{4{,}8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h}, \quad \text{donde } h \neq 0\\
\sqrt{2r-h}\,dh &= -\frac{4{,}8\pi\phi^2}{2\times 576\,H_0}dt
\end{aligned}$$

condiciones iniciales:
en $t_0 = 0 \quad h = 2r$, con ella hallo constante de integración.

El tiempo de vaciado t_v se produce cuando $h = 0$. Hallar t_v.

Caso 3. Un cono circular recto de altura H_0 y radio R dispuesto verticalmente con orificio circular en el fondo de diámetro ϕ'' (Ver figura 3.9).

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh} = -0{,}6\pi\left(\frac{\phi''}{24}\right)^2\sqrt{2\times 32h}$$

Universidad de Antioquia Depto. de Matematicas

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{4{,}8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h} \tag{3.9}$$

Por semejanza de triángulos tenemos que:

$$\frac{R}{r} = \frac{H_0}{h} \Rightarrow r = \frac{Rh}{H_0} \tag{3.10}$$

y como $dQ = \pi r^2 dh$ entonces, sustituyendo (3.10): $dQ = \pi \frac{R^2 h^2}{H_0^2}\, dh$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{\pi R^2}{H_0^2}\, h^2\, \frac{dh}{dt} \tag{3.11}$$

(3.9) = (3.11): $\dfrac{\pi R^2}{H_0^2}\, h^2\, \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{4{,}8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h}$

$\Rightarrow h^{\frac{3}{2}} \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{4{,}8\phi^2\, H_0^2}{576 R^2}$

Condiciones iniciales: cuando $t = 0, \quad h = H_0$

El tiempo de vaciado t_v se produce cuando $h = 0$. Hallar t_v.

Ejercicio 1. Un tanque semiesférico tiene un radio de 1 pie; el tanque está inicialmente lleno de agua y en el fondo tiene un orificio de 1 pulg. de diámetro. Calcular el tiempo de vaciado.
(**Rta.:** 112 seg.)

Ejercicio 2. Un cono circular recto de radio R y altura H tiene su vértice hacia abajo. El tanque tiene un orificio en el fondo cuya área A es controlada por una válvula y es proporcional a la altura del agua en cada instante. Suponiendo que el tanque está lleno de agua, calcular el tiempo de vaciado. Del tiempo de vaciado, ¿qué porcentaje es requerido para vaciar la mitad del volumen?
(**Rta.:** el porcentaje requerido para bajar la mitad del volumen es 29,3 %)

Ejercicio 3. Un tanque cúbico de lado 4 pies, está lleno de agua, la cual sale por una hendidura vertical de $\frac{1}{8}$ pulg. de ancho y de 4 pies de alto. Encontrar el tiempo para que la superficie baje 3 pies. (Ayuda: encontrar el número de pies cúbicos por segundo de agua que salen de la hendidura cuando el agua

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

tiene h pies de profundidad).
(**Rta.:** 360 segundos.)

Ejercicio 4. Encontrar el tiempo requerido para llenar un tanque cúbico de lado 3 pies si tiene un orificio circular de 1 pulg. de diámetro en la base y si entra agua al tanque a razón de π pies^3/min.
(**Rta.:** 26 min, 14 seg.)

Ejercicio 5. Un tanque rectangular vacío de base B^2 pies^2, tiene un agujero circular de área A en el fondo. En el instante $t = 0$, empieza a llenarse a razón de E pies cúbicos por segundo. Hallar t en función de h. Mostrar que si el tanque tiene una altura H, nunca se llenaría a menos que $E > 4{,}8\,A\sqrt{H}$.
(**Rta.:** $t = \frac{2}{a}\left[b \ln \frac{b}{b-\sqrt{h}} - \sqrt{h}\right]$, $b > \sqrt{h}$, donde, $a = \frac{4{,}8\,A}{B^2}$, $b = \frac{E}{4{,}8\,A}$.)

Ejercicio 6. Un embudo de 10 pies de diámetro en la parte superior y 2 pies de diámetro en la parte inferior tiene una altura de 24 pies. Si se llena de agua, hallar el tiempo que tarda en vaciarse.
(**Rta.:** 14,016 seg.)

Ejercicio 7. Un tanque con una cierta forma geométrica esta lleno de agua. El agua sale por un orificio situado en la base a una rata proporcional a la raíz cuadrada del volumen restante en el tanque en todo tiempo t. Si el tanque contiene inicialmente 64 galones de agua y 15 galones salen el primer día, calcular el tiempo en el cual hay 25 galones en el tanque.
(**Rta.:** 72 horas)

Ejercicio 8. Un embudo de 5 pies de radio en la parte superior y 1 pie de radio en la parte inferior tiene una altura de H pies. Si se llena de agua: a) Hallar el tiempo de vaciado; b) Del tiempo de vaciado qué porcentaje es necesario para que el nivel baje a $\frac{H}{4}$?
(**Rta.:** a) $2{,}86\sqrt{H}$; b) 86.41 %)

Universidad de Antioquia, Depto de Matemáticas

3.5. APLICACIONES A LA FISICA

Caso 1. Caída libre. (Ver figura 3.10)
Por la segunda ley de Newton (ver textos de Física), se llega a que:

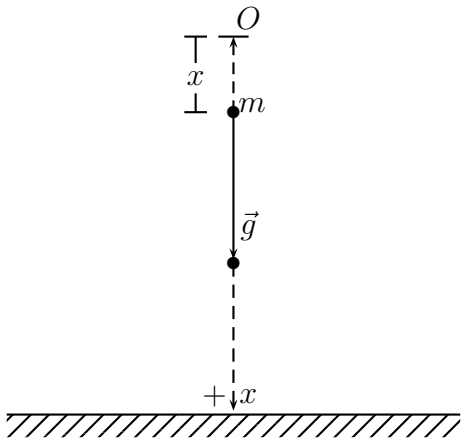


Figura 3.10

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\frac{dv}{dt} = g \Rightarrow v = gt + C_1$$

tomemos como condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad v = v_0 \Rightarrow v = gt + v_0$$

por lo tanto, $\frac{dx}{dt} = gt + v_0$, e integrando, obtenemos:

$$x = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + C_2$$

y tomemos las siguientes condiciones iniciales: $t = 0 \quad x = x_0$

$$\Rightarrow x = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0$$

Caso 2. Caída con resistencia del aire.
Por la segunda ley de Newton (ver textos de Física), se llega a que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kv$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

dividiendo por m

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= g - \frac{k}{m}v\\ \frac{dv}{dt} &= g - \frac{k}{m}v\end{aligned}$$

obtenemos la E.D. lineal en v

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g.$$

Hallemos el F.I.

$$\text{F.I.} = e^{\int \frac{k}{m}\,dt} = e^{\frac{k}{m}t}$$

resolviéndola

$$\begin{aligned}ve^{\frac{k}{m}t} &= \int e^{\frac{k}{m}t}\,(g)\,dt + C\\ ve^{\frac{k}{m}t} &= \frac{m}{k}\,g\,e^{\frac{k}{m}t} + C\\ v &= \frac{m}{k}g + Ce^{-\frac{k}{m}t}.\end{aligned}$$

Supongamos que las condiciones iniciales son: $t = 0, \quad v = 0$ (es decir, parte del reposo), entonces

$$0 = \frac{mg}{k} + C \;\Rightarrow\; C = -\frac{mg}{k}$$

$$v = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}\,e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right);$$

obsérvese que cuando $\quad t \to \infty \Rightarrow v \to \frac{mg}{k}$.

Resolviendo para x y teniendo como condiciones iniciales $t = 0$ y $x = 0$ se llega a que:

$$x = \frac{mg}{k}\,t - \frac{m^2g}{k^2}\,(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Caso 3. Cuerpos con masa variable.

Por la segunda ley de Newton para masa variable (ver textos de Física), se llega a que:

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \Rightarrow \frac{d}{dt}(mv) = \sum F + (v+\omega)\frac{dm}{dt}$$

donde, $\sum F$: Fuerzas que actúan sobre el cuerpo,
ω: velocidad en relación a m de las partículas que se desprenden del cuerpo.

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = \sum F + v\frac{dm}{dt} + \omega\frac{dm}{dt}$$

por tanto,

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F + \omega\frac{dm}{dt}$$

Ejemplo 5. Un cohete con masa estructural m_1, contiene combustible de masa inicial m_2; se dispara en línea recta hacia arriba, desde la superficie de la tierra, quemando combustible a un índice constante a (es decir, $\frac{dm}{dt} = -a$, donde m es la masa variable total del cohete) y expulsando los productos de escape hacia atrás, a una velocidad constante b en relación al cohete. Si se desprecian todas las fuerzas exteriores excepto la fuerza gravitacional mg, donde g la suponemos constante; encontrar la velocidad y la altura alcanzada en el momento de agotarse el combustible (velocidad y altura de apagado).

<u>Solución</u>:

Como $\frac{dm}{dt} = -a \Rightarrow m = -at + C_1$

En $t = 0$, $\quad m = m_1 + m_2$ luego $m_1 + m_2 = -a\,0 + C_1$ por tanto,

$$C_1 = m_1 + m_2, \quad \Rightarrow \quad m = m_1 + m_2 - at$$

Como $\omega = -b$ entonces,

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - b\frac{dm}{dt} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -mg - b(-a)$$

o sea que, $m\frac{dv}{dt} = -mg + ab$

©Universidad de Antioquia, Dpto. de Matemáticas

Reemplazo m: $(m_1 + m_2 - at)\frac{dv}{dt} = -(m_1 + m_2 - at)g + ab$
dividiendo por $m_1 + m_2 - at$: $\frac{dv}{dt} = -g + \frac{ab}{m_1+m_2-at}$
luego

$$v = -gt - \frac{ab}{a}\ln|m_1 + m_2 - at| + C_2 = -gt - b\ln|m_1 + m_2 - at| + C_2$$

Condiciones iniciales: en $t = 0$, $\quad v = 0 \Rightarrow 0 = 0 - b\ln|m_1 + m_2| + C_2$
por tanto $C_2 = b\ln|m_1 + m_2|$

$$v = -gt - b\ln|m_1 + m_2 - at| + b\ln|m_1 + m_2| = -gt + b\ln\left|\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 - at}\right|$$

Pero teníamos que $m = m_1+m_2-at$ y como el tiempo de apagado se produce cuando $m = m_1$ ya que no hay combustible, es decir, $m_1 = m_1 + m_2 - at$. Por tanto $at = m_2 \Rightarrow t = \frac{m_2}{a}$ o sea que cuando $t = \frac{m_2}{a} \Rightarrow v =$ velocidad de apagado.

Sustituyendo, queda que

$$v = -\frac{gm_2}{a} + b\ln\left|\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 - a\frac{m_2}{a}}\right|$$

luego $v = -\frac{m_2 g}{a} + b\ln\left[\frac{m_1+m_2}{m_1}\right]$

De la misma manera se encuentra que $h_a =$ altura alcanzada al acabarse el combustible $= -\dfrac{m_2^2 g}{2a^2} + \dfrac{bm_2}{a} + \dfrac{bm_1}{a}\ln\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$

Caso 4. Cuerpos en campo gravitacional variable. (Ver figura 3.11)
Por la ley de Gravitación Universal de Newton (ver textos de Física):

$$F = \frac{GMm}{(x + R)^2}$$

donde,
x: la distancia del cuerpo a la superficie de la tierra.
M: la masa de la tierra.
m: la masa del cuerpo.
R: el radio de la tierra.
G: la constante de gravitación universal.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

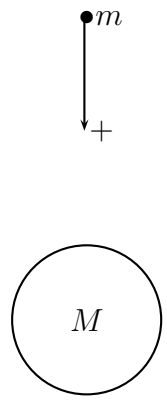


Figura 3.11

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

Se define el peso de un cuerpo como $w(x) = \frac{k_1 m}{(x+R)^2}$, donde $k_1 = GM$. Si $x = 0$, entonces el peso del cuerpo de masa m en la superficie de la tierra es: $w(0) = mg = \frac{k_1 m}{R^2}$, entonces $k_1 = gR^2$, por lo tanto el peso de un cuerpo a una distancia x de la superficie de la tierra es: $w(x) = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}$.

Ejemplo 6. Se lanza un cuerpo de masa m hacia arriba de la tierra con velocidad inicial v_0. Suponiendo que no hay resistencia del aire, pero tomando en cuenta la variación del campo gravitacional con la altura, encontrar la menor velocidad inicial v_0 que necesita el cuerpo para que no regrese a la tierra. Esta velocidad inicial v_0 se le llama velocidad de escape (Ver figura 3.12).

<u>Solución</u>:

$$m\,\frac{dv}{dt} = w(x) = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

donde el signo menos indica que la dirección de la fuerza es hacia el centro de la tierra.

Cancelando m, y resolviendo la ecuación diferencial resultante y poniendo como condiciones iniciales, en $t = 0$, $x = 0$ y $v = v_0$, se llega a que:

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R} \geq 0$$

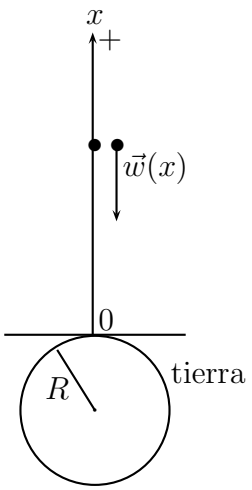


Figura 3.12

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Por lo tanto, $v_0^2 \geq 2gR$
de aquí concluímos que la velocidad de escape $v_0 = \sqrt{2gR}$

Ejercicio 1. Un torpedo se desplaza a una velocidad de 60 millas/hora en el momento de agotarse el combustible; si el agua se opone al movimiento con una fuerza proporcional a su velocidad y si en una milla de recorrido reduce su velocidad a 30 millas/hora. ¿A que distancia se detendrá?
(**Rta.:** 2 millas)

Ejercicio 2. En el interior de la tierra la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia del centro, si se perfora un orificio que atraviese la tierra de polo a polo y se lanza una piedra en el orificio con velocidad v_0, con que velocidad llegará al centro?
(**Rta.:** $v = \sqrt{gR + v_0^2}$, donde R es el radio de la tierra.)

Ejercicio 3. Una bala se introduce en una tabla de $h =$ 10 cm. de espesor con una velocidad $v_0 =$ 200 mt/seg, traspasándola con $v_1 =$ 80 mt/seg. Suponiendo que la resistencia de la tabla al movimiento de la bala es proporcional al cuadrado de la velocidad. Hallar el tiempo que demora la bala en atravesar la tabla.
(**Rta.:** $t = \frac{h_0(v_1 - v_0)}{v_0 v_1 \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)} = \frac{3}{4000 \ln 2{,}5}$ seg.)

Ejercicio 4. Una cadena de 4 pies de longitud tiene 1 pie de longitud colgando del borde de una mesa. Despreciando el rozamiento, hallar el tiempo que tarda la cadena en deslizarse fuera de la mesa.
(**Rta.:** $t = \sqrt{\frac{4}{g}} \ln(4 + \sqrt{15})$ seg.)

Ejercicio 5. Un punto material de masa un gramo se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo calculado desde el instante $t = 0$ e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante $t = 10$ seg., la $v = 50$cm/seg y la $f = 4$ dinas. Qué velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto desde el comienzo del movimiento?
(**Rta.:** $v = \sqrt{72500}$ cm./seg.= 269,3 cm/seg.)

Ejercicio 6. Un barco retrasa su movimiento por acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es 10 mt/seg, después de 5 seg. su velocidad será 8 mt/seg. Después de cuanto tiempo la velocidad será 1 mt/seg ?
(**Rta.:** $t = -5\frac{\ln 10}{\ln 0{,}8}$ seg.)

Ejercicio 7. Un cuerpo de masa M se deja caer desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuentre el tiempo que transcurre hasta que la velocidad del cuerpo alcance el 80 % de su velocidad límite.
(**Rta.:** $t = -\frac{M}{k} \ln 0{,}2$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemática

CAPÍTULO 4

TEORIA DE LAS E.D.O. LINEALES

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

4.1. INTRODUCCION

Utilizando algebra lineal, estudiaremos la E.D.O. lineal de orden n con coeficientes constantes.

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = h(x),$$

donde $h(x)$ es una función continua en $I = [a, b]$ y $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$.

Notación y conceptos:

i) $\frac{d}{dx} = D_x$

Si no hay ambigüedad con respecto a la variable independiente, tomaremos: $D_x = D$.

$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right) = D_x D_x = D_x^2 = D^2$

en general, $\frac{d^m}{dx^m} = D_x^m = D^m = D_x(D_x^{m-1})$

ii) $I = [a, b]$

iii) $C[a, b] = C(I)$: clase de todas las funciones continuas en el intervalo I

$C'[a, b] = C'(I)$: clase de todas las funciones que tienen primera derivada continua en I (o funciones continuamente diferenciables en I).

$C'(I) \subset C(I)$ ya que toda función que es derivable en I es continua en I.

$C^2(I) = C^2[a, b]$: la clase de todas las funciones que tienen segunda derivada continua en I.

En general, $C^n(I) = C^n[a, b]$: clase de todas las funciones que tienen derivada de orden n continua en I.

Obsérvese que: $C(I) \supset C'(I) \supset C^2(I) \supset \ldots \supset C^n(I) \supset \ldots$

Si $f, g \in C(I)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos:

a) $\forall x \in I : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \in C(I)$

b) $\forall x \in I : (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \in C(I)$

En general, si

$$f, g \in C^n(I) \;\Rightarrow\; \forall x \in I : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \in C^n(I) \tag{4.1}$$

$$\forall x \in I : (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \in C^n(I) \tag{4.2}$$

Con las operaciones definidas en a) y b) podemos probar que $C(I)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Y de (4.1) y (4.2) podemos concluir que $C^n(I)$ es un subespacio vectorial de $C(I)$ para $n \geq 1$.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

En general, si $n \geq m$, entonces $C^n(I)$ es subespacio vectorial de $C^m(I)$.

Nota: estos espacios son de dimensión infinita.

iv) Como $\frac{d}{dx}(f+g)(x) = \frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$

es lo mismo que $D(f+g)(x) = D(f(x)+g(x)) = Df(x) + Dg(x)$

y también $D(\alpha f)(x) = D(\alpha f(x)) = \alpha Df(x)$,

por tanto, podemos decir que $D : C'(I) \to C(I)$ es una transformación lineal .

Análogamente, $D^2 : C^2(I) \to C(I)$ es una transformación lineal.

En general, $D^n : C^n(I) \to C(I)$ es una transformación lineal.

Por definición $D^0 : C(I) \to C(I)$ es la transformación identidad, es decir, $f \mapsto D^0 f = f$.

En el algebra lineal se tiene que si $T_1 : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ y $T_2 : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ son transformaciones lineales, entonces,

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 : \mathbf{U} &\to \mathbf{V} \\ x &\mapsto (T_1+T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \alpha T_1 : \mathbf{U} &\to \mathbf{V} \\ x &\mapsto (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{aligned}$$

son también transformaciones lineales. Por ejemplo: $D + D^2$ es una Transformación Lineal, definida por:

$$D + D^2 : C^2(I) \to C(I)$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

En general:

$$a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)D^0 : C^n(I) \to C(I)$$

es una Transformación Lineal.

Esta Transformación Lineal se le denomina **operador diferencial** lineal de orden n, donde $a_n(x), \ldots, a_0(x)$ son funciones continuas en I y $a_n(x) \neq 0$ en I.

Este operador diferencial se denota por:

$$L(D) = \underbrace{a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)D^0}_{\text{operador diferencial de orden } n \text{ con coeficientes variables}}$$

Si $y \in C^n(I) \Rightarrow L(D)y \in C(I)$

Ejemplo 1. Si $L(D) = D + p(x) = D + 2x$ y $f(x) = x^2$. Aplicar $L(D)$ a la función $f(x)$
<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \in C'(I) \\ L(D)(x^2) &= (D + 2xD^0)(x^2) \\ &= D(x^2) + 2xD^0(x^2) = 2x + 2xx^2 \\ &= 2x + 2x^3 \in C(I) \end{aligned}$$

Observación: Resolver la E.D. $L(D)y = 0$ es lo mismo que hallar el núcleo del operador diferencial $L(D)$.

Ejemplo 2. Hallar el núcleo del operador $L(D) = D + 2xD^0$
<u>Solución</u>:

$(D + 2xD^0)y = 0 \Rightarrow Dy + 2xy = 0$ (E.D lineal en y con $p(x) = 2x$ y $Q(x) = 0$)

$F.I. = e^{\int 2x\,dx} \Rightarrow F.I. = e^{x^2}$

$ye^{x^2} = \int e^{x^2} \times 0\,dx + C \Rightarrow y = Ce^{-x^2}$

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

Núcleo $L(D) = \{Ce^{-x^2}/C \in \mathbb{R}\}$

como e^{-x^2} genera todo el núcleo $\Rightarrow$ dim núcleo $= 1$.

Teorema 4.1 (Principio de superposición).

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pertenecen al núcleo de $L(D)$, entonces la combinación lineal: $\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i$ y $n \geq 1$ está en el núcleo de $L(D)$

Demostración: sea $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, veamos que y está en el núcleo, es decir, veamos que $L(D)y = 0$.
Como $y_1, y_2, \ldots, y_n$ están en el núcleo de $L(D)$, entonces $L(D)y_i = 0$, para $i = 1, \ldots, n$
Como $L(D)$ es un operador lineal, entonces

$$L(D)y = L(D)(\sum_{i=1}^{n} C_iy_i) = \sum_{i=1}^{n} L(D)(C_iy_i) = \sum_{i=1}^{n} C_iL(D)y_i = 0$$

luego y esta en el núcleo de $L(D)$ ■

Producto de Operadores Diferenciales:

Analicemos esta operación con un ejemplo, sean:

$$L_1(D) = D + 2D^0, \qquad L_2(D) = D^2 + 3D^0$$

$$L_1(D)L_2(D) : C^3(I) \to C(I)$$

es una Transformación Lineal

$$L_1(D)L_2(D)y = \overbrace{(D + 2D^0)}^{\text{operador}}\overbrace{(D^2 + 3D^0)}^{\text{operador}}y$$

donde y es una función

$$\begin{aligned} &= \underbrace{(D + 2D^0)}_{\text{operador}}\underbrace{(D^2y + 3D^0y)}_{\text{función}} \\ &= D(D^2y) + D(3D^0y) + 2D^0(D^2y) + 2D^0(3D^0y) \end{aligned}$$

Universidad de Antioquia, Dep. de Matemáticas

$$
\begin{aligned}
&= D^3y + 3Dy + 2D^2y + 6D^0y \\
&= (D^3 + 2D^2 + 3D + 6D^0)y \\
L_1(D)L_2(D) &= D^3 + 2D^2 + 3D + 6D^0
\end{aligned}
$$

De la misma manera se calcula $L_2(D)L_1(D)$, con el siguiente resultando:

$$L_2(D)L_1(D) = D^3 + 2D^2 + 3D + 6D^0 = L_1(D)L_2(D)$$

lo cual nos permite decir que el producto es conmutativo siempre y cuando los coeficientes sean constantes.

Cuando $L_1(D)$ y $L_2(D)$ tienen coeficientes variables, entonces, en general $L_1(D)L_2(D) \neq L_2(D)L_1(D)$.

Ejemplo 3. $L_1(D) = D + xD^0, \qquad L_2(D) = xD^2 + D + xD^0$

Primero hallemos $L_1(D)\,L_2(D)$, para ello calculemos

$$
\begin{aligned}
L_1(D)\,L_2(D)y &= (D + xD^0)(xD^2 + D + xD^0)y \\
&= (D + xD^0)(xD^2y + Dy + xD^0y) \\
&= D(xD^2y) + D^2y + D(xy) + xD^0(xD^2y) + (xD^0)Dy + \\
&+ (xD^0)(xD^0y) \\
&= xD^3y + D^2y + D^2y + xDy + y + x^2D^2y + xDy + x^2y \\
&= xD^3y + (2 + x^2)(D^2y) + 2xDy + (1 + x^2)y
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$L_1(D)\,L_2(D) = xD^3 + (2 + x^2)D^2 + 2xD + (1 + x^2)D^0$$

Ahora hallemos $L_2(D)\,L_1(D)$ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
L_2(D)\,L_1(D)y &= (xD^2 + D + xD^0)(D + xD^0)y \\
&= (xD^2 + D + xD^0)(Dy + xD^0y) \\
&= (xD^2 + D + xD^0)(Dy + xy) \\
&= xD^2(Dy + xy) + D(Dy + xy) + xD^0(Dy + xy) \\
&= xD^2(Dy) + xD^2(xy) + D(Dy) + D(xy) + x(Dy + xy) \\
&= xD^3y + xDD(xy) + D^2y + xDy + y + xDy + x^2y
\end{aligned}
$$

Universidad de Antioquia Depto. de Matemáticas

$$
\begin{aligned}
&= xD^3y + xD(xDy + y) + D^2y + xDy + y + xDy + x^2y \\
&= xD^3y + x(D(xDy) + Dy) + D^2y + xDy + y + xDy + x^2y \\
&= xD^3y + x(xD^2y + Dy + Dy) + D^2y + xDy + y + xDy + x^2y \\
&= xD^3y + x(xD^2y + 2Dy) + D^2y + Dy + y + xDy + x^2y \\
&= xD^3y + x^2D^2y + 2xDy + D^2y + xDy + y + xDy + x^2y \\
&= xD^3y + (x^2+1)D^2y + (3x+1)Dy + (x^2+1)y \\
&= (xD^3 + (x^2+1)D^2 + (3x+1)D + (x^2+1)D^0)y
\end{aligned}
$$

Luego $L_2(D)L_1(D) = xD^3 + (x^2+1)D^2 + (3x+1)D + (x^2+1)D^0 \neq L_1(D)\,L_2(D)$

Definición 4.1 (Condición inicial). *Es una o varias condiciones que se le colocan a una E.D.O. en un punto.*

Ejemplo 4. $y'' + k^2y = 0$, con las condiciones iniciales: $y(0) = 1, y'(0) = 1$

Definición 4.2 (Condición de Frontera). *Es una o varias condiciones que se le colocan a una E.D.O. en varios puntos.*

Ejemplo 5. $y'' + k^2y = 0$, con las condiciones de frontera: $y(0) = 1, \qquad y'(1) = 1$

Los teoremas que se enuncian a continuación son teoremas de existencia y unicidad, se demuestran en el Apéndice A.

Teorema 4.2 (de Picard).

Si f, $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en un rectángulo $R : |x| \leq a$ y $|y| \leq b$, entonces existe un intervalo $|x| \leq h \leq a$ en el cual existe una solución única $y = \phi(x)$ del problema de valor inicial (P.V.I.): $y' = f(x, y)$ con $y(0) = 0$.

Nota:

a) La condición inicial $y(0) = 0$ también puede ser cambiada por la condición inicial $y(a) = b$ con (a, b) en el rectángulo R

b) Es importante anotar que este es un teorema de validez local, es decir, se cumple en un intervalo que contiene al punto donde se da la condición

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

inicial, por fuera de este intervalo puede ocurrir que la solución no sea única; pero cuando el operador diferencial es lineal y todos los coeficientes $a_i(x)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ son continuos en $\mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$ en $\mathbb{R}$ (en particular cuando los $a_i(x)$ son constantes para $i = 0, 1, \ldots, n$), entonces la solución es continua y global, es decir, se cumple en todo $\mathbb{R}$, como se demuestra en el corolario A.1 del Apéndice.

Teorema 4.3.

Sea $L(D)$ un operador diferencial lineal de primer orden en el intervalo I y sea $x_0 \in I$, entonces $\forall\, y_0$ el P.V.I.: $L(D)y = Q(x)$ con $y(x_0) = y_0$ tiene una solución única.

Teorema 4.4.

Sea $L(D)$ un operador diferencial lineal de orden n en I y sea x_0 un elemento de ese intervalo ($x_0 \in I$), entonces $\forall\, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ reales cualesquiera el P.V.I.: $L(D)y = h(x)$, con

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

tiene una única solución.

Ejemplo 6. Teniendo en cuenta el Teorema de Picard, analizar la E.D.

$$xy' = 2y, \qquad y(-2) = 4$$

<u>Solución</u>: obsérvese que esta E.D. es lineal, con $a_1(x) = x$ y por tanto $a_1(0) = 0$ (es decir, $a_1(x)$ no es diferente de cero $\forall x \in \mathbb{R}$), lo que indica que la solución no es global, como lo veremos a continuación.

Separando variables, obtenemos la siguiente solución general

$$y = Cx^2,$$

y para la condición inicial $y(-2) = 4$ se tiene que $C = 1$. De la E.D. tenemos que $y' = f(x, y) = 2\frac{y}{x}$. Por lo tanto $f(x, y) = 2\frac{y}{x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x}$ son discontinuas en $x = 0$, como la condición esta dada en $x = -2$, entonces estas funciones son continuas en este punto y por el Teorema de Picard existe un intervalo, en este caso $(-\infty, 0)$, para el cual la solución es única y es $y = x^2$, por fuera de este intervalo, por ejemplo en $\mathbb{R}$, puede no ser única, por ejemplo

$$y = x^2, \qquad y = \begin{cases} x^2, & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -x^2, & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad y = \begin{cases} x^2, & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

son soluciones en $\mathbb{R}$ y todas tres pasan por el punto $(-2, 4)$ como lo vemos en la figura 4.1

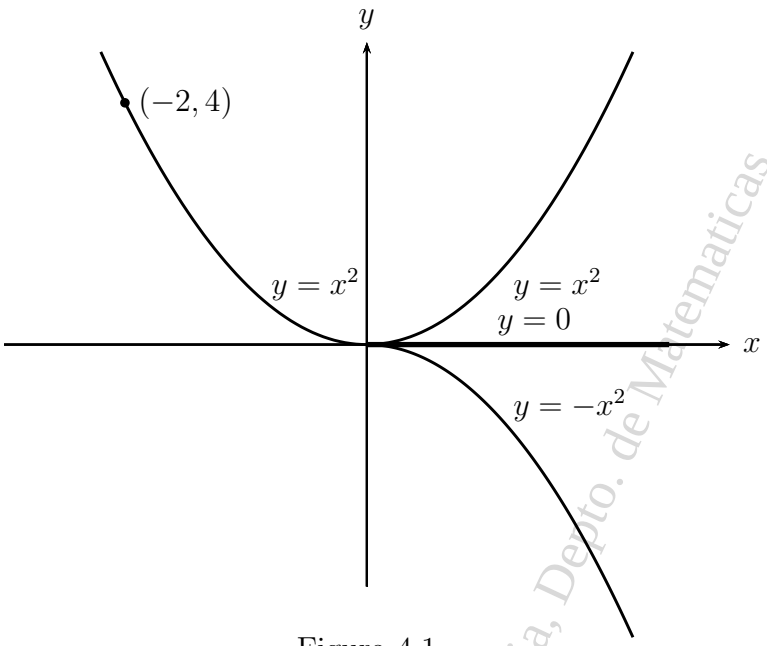


Figura 4.1

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejemplo 7. Dada las condiciones iniciales $y(-2) = 1, \quad y'(-2) = 1$ y la solución general $y = C_1 + C_2 \ln|x|$ de la E.D. $xy'' + y' = 0$, hallar C_1 y C_2 .
<u>Solución</u>:

Solución general (como lo veremos más adelante) es: $y = C_1 + C_2 \ln|x|$

$y' = \frac{C_2}{x}$

$y = 1 = C_1 + C_2 \ln|-2|$

$y' = 1 = \frac{C_2}{-2} \Rightarrow C_2 = -2 \Rightarrow 1 = C_1 + (-2)\ln 2$

$\Rightarrow C_1 = 1 + 2\ln 2$

luego $y = 1 + 2\ln 2 - 2\ln|x|$ esta es la solución única en $(-\infty, 0)$ que pasa por el punto $(-2, 1)$.

4.2. DIMENSIÓN DEL ESPACIO VECTORIAL SOLUCIÓN DE UNA E.D.O.

Dijimos que $C^n(I)$ tiene dimensión infinita, pero el espacio solución de la E.D.O. $L(D)y = 0$ (con $L(D)$ un operador diferencial lineal de orden n), es el núcleo de $L(D)$, el cual tiene dimensión n, como lo veremos en los teoremas que expondremos a continuación.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Definición 4.3.

a) *Decimos que las n funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son* **linealmente dependientes** *en un intervalo I si existen constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ no todas nulas tales que*

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) = 0$$

para todo x en I.

b) *Si para todo x en I*

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) = 0$$

implica que $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, entonces decimos que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son **linealmente independientes** *en el intervalo I.*

Nota: demostrar que n funciones son linealmente independientes es a veces complicado, pero cuando las n funciones son soluciones de una E.D. lineal homogénea el problema se vuelve más sencillo, utilizando el Wronskiano.

Definición 4.4 (Wronskiano). *Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ en $C^{n-1}(I)$, el determinante:*

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \det \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

con $x \in I$, se le llama el Wronskiano de $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$.

Obsérvese que el Wronskiano depende de la variable x.
En particular cuando $n = 2$, el Wronskiano tiene la siguiente propiedad.

Observación (Fórmula de Abel): para $n = 2$
$W(y_1, y_2) = \det \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

Consideremos la E.D.O. lineal, homogénea de orden dos:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0,$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son continuas en I y sean y_1, y_2 soluciones de esta E.D., luego

$$\begin{aligned} y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1 &= 0 && (4.3) \\ y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2 &= 0 && (4.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4{,}3) \times y_2 : y_1''y_2 + a(x)y_1'y_2 + b(x)y_1y_2 &= 0 && (4.5) \\ (4{,}4) \times y_1 : y_2''y_1 + a(x)y_2'y_1 + b(x)y_1y_2 &= 0 && (4.6) \end{aligned}$$

$$(4{,}6) - (4{,}5) : y_2''y_1 - y_1''y_2 + a(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0 \qquad (4.7)$$

como

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= y_1y_2' - y_2y_1' \\ W'(y_1, y_2) &= y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_2y_1'' - y_2'y_1' \\ &= y_1y_2'' - y_2y_1'' \end{aligned}$$

Luego en (4.7): $W' + a(x)W = 0$, lineal en W de primer orden .

Su solución es $We^{\int a(x)dx} = C$, luego la solución general es

$$W = C\overbrace{e^{-\int a(x)dx}}^{>0}$$

Esta solución general es llamada Fórmula de Abel.

Obsérvese que cuando $\quad C = 0 \Rightarrow W = 0 \quad$ y si $\quad C \neq 0 \Rightarrow W \neq 0$

Lema 4.1.

El Wronskiano de n funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linealmente dependientes es idénticamene cero.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Demostración: supongamos que para todo x en I

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = 0$$

donde algunas de los $C_i \neq 0$.
Derivando $n-1$ veces, obtenemos

$$\begin{array}{ll} C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) & = 0 \\ C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x) + \ldots + C_ny_n'(x) & = 0 \\ C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x) + \ldots + C_ny_n''(x) & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ C_1y_1^{(n-1)}(x) + C_2y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x) & = 0 \end{array}$$

que se cumplen para todo x en I. Este sistema homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución distinta de la trivial si y solo si el determinante del sistema (o sea el Wronskiano) se anula en I, es decir si y solo si $W(x) = 0$ para todo x en I. ■

Nota: el recíproco es cierto cuando sabemos que las funciones son soluciones de una Ecuación Diferencial, pero en general es falso. Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x|x|$ son linealmente independientes $\forall x \in \mathbb{R}$, pero $W(f,g) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.5.

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son n soluciones de la E.D. lineal homogénea de orden n

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

en el intervalo I y en éste intervalo las funciones $a_i(x)$ son continuas y $a_n(x) \neq 0$. Entonces

a) Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes, entonces el Wronskiano $W(x) \equiv 0$ en I.

b) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes, si y solo si el Wronskiano $W(x) \neq 0$ para todo x en I.

Demostración: la parte a) ya se demostró en el Lema anterior.
b)$\Rightarrow$) Hagamos la demostración por el contra-recíproco, es decir, supongamos que existe a en I tal $W(a) = 0$ y veamos que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes.
Como $W(a)$ es el determinante del sistema:

$$C_1y_1(a) + C_2y_2(a) + \ldots + C_ny_n(a) = 0$$

Universidad de Antioquia, Dep. de Matematicas

$$C_1y_1'(a) + C_2y_2'(a) + \ldots + C_ny_n'(a) = 0$$
$$C_1y_1''(a) + C_2y_2''(a) + \ldots + C_ny_n''(a) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_1y_1^{(n-1)}(a) + C_2y_2^{(n-1)}(a) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(a) = 0$$

donde los C_i son las incógnitas y como $W(a) = 0$ (determinante de los coeficientes del sistema) y por lo que sabemos del algebra lineal, este tiene una solución distinta de la trivial, es decir existen $C_i \neq 0$.
Con esta solución no trivial definamos la siguiente función

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$$

y por el principio de superposición $Y(x)$ es solución de la E.D.. Evaluemos esta nueva función y sus derivadas hasta de orden $n-1$ en a

$$Y(a) = C_1y_1(a) + C_2y_2(a) + \ldots + C_ny_n(a) = 0$$
$$Y'(a) = C_1y_1'(a) + C_2y_2'(a) + \ldots + C_ny_n'(a) = 0$$
$$Y''(a) = C_1y_1''(a) + C_2y_2''(a) + \ldots + C_ny_n''(a) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y^{(n-1)}(a) = C_1y_1^{(n-1)}(a) + C_2y_2^{(n-1)}(a) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(a) = 0$$

en conclusión

$$Y(a) = Y'(a) = \ldots = Y^{(n-1)}(a) = 0$$

por otro lado sabemos que la función nula $H(x) \equiv 0$ es también una solución de la E.D.

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

la cual satisface las condiciones iniciales anteriores y por el teorema de existencia y unicidad, podemos afirmar que

$$Y(x) = H(x) = 0 = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$$

y como algunos de estos C_i son diferentes de cero, entonces $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes.

$\Leftarrow$) Supongamos que $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ y veamos que

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemática

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

son linealmente independientes.
Supongamos que

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

son linealmente dependientes, por lo tanto (por la parte a))

$$W(x) \equiv 0 \text{ (Absurdo!)} \qquad \blacksquare$$

Teorema 4.6 (Dimensión del Núcleo).

Sea $L(D)y = a_n(x)D^n y + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \ldots + a_1(x)Dy + a_0(x)y = 0$ una E.D.O. lineal de orden n con coeficientes continuos definida en el intervalo I, entonces el espacio solución de $L(D)$ (o sea el núcleo de $L(D)$), tiene dimensión n.

Demostración: sea $Y(x)$ una solución de la E.D. y sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n soluciones linealmente independientes de la E.D. Veamos que $Y(x)$ se puede expresar como una combinación lineal de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Sea a un punto de I y consideremos el siguiente sistema:

$$Y(a) = C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) + \ldots + C_n y_n(a)$$

$$Y'(a) = C_1 y_1'(a) + C_2 y_2'(a) + \ldots + C_n y_n'(a)$$

$$Y''(a) = C_1 y_1''(a) + C_2 y_2''(a) + \ldots + C_n y_n''(a)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y^{(n-1)}(a) = C_1 y_1^{(n-1)}(a) + C_2 y_2^{(n-1)}(a) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(a)$$

el determinante de los coeficientes del sistema es el Wronskiano evaluado en a, es decir, $W(a)$ y como $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes entonces $W(a) \neq 0$, esto quiere decir que existe al menos un $C_i \neq 0$.
Con los $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (al menos uno de ellos es diferente de cero) definimos la función

$$G(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

luego, por el principio de superposición, $G(x)$ es solución; evaluemos esta función y sus derivadas hasta de orden $n-1$ en a:

$$G(a) = C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) + \ldots + C_n y_n(a) = Y(a)$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$G'(a) = C_1y_1'(a) + C_2y_2'(a) + \ldots + C_ny_n'(a) = Y'(a)$$
$$G''(a) = C_1y_1''(a) + C_2y_2''(a) + \ldots + C_ny_n''(a) = Y''(a)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G^{(n-1)}(a) = C_1y_1^{(n-1)}(a) + C_2y_2^{(n-1)}(a) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(a) = Y^{(n-1)}(a)$$

Es decir, las funciones G y Y coinciden en la condición inicial, por tanto por el teorema de existencia y unicidad, $G(x) = Y(x)$ para todo x en I.
Luego
$$G(x) = Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) \qquad \blacksquare$$

Nota:

i. Lo que dice este teorema es que para resolver una E.D. lineal homogénea de orden n, se debe encontrar n soluciones linealmente independientes y la solución general es la combinación lineal de las n soluciones.

ii. Si las n-tuplas
$$\begin{array}{c}(y_1(a), y_1'(a), \ldots, y_1^{(n-1)}(a))\\ (y_2(a), y_2'(a), \ldots, y_2^{(n-1)}(a))\\ \vdots \\ (y_n(a), y_n'(a), \ldots, y_n^{(n-1)}(a))\end{array}$$
son linealmente independientes, entonces las funciones
$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$
son linealmente independientes en I.

Ejemplo 8. Si $y_1 = e^{m_1x}$, $y_2 = e^{m_2x}$ con $m_1 \neq m_2$, mostrar que y_1 y y_2 son linealmente independientes.

<u>Solución</u>: más adelante veremos que y_1, y_2 son soluciones de una E.D. lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{m_1x} & e^{m_2x} \\ m_1e^{m_1x} & m_2e^{m_2x} \end{vmatrix}$$
$$= m_2e^{(m_1+m_2)x} - m_1e^{(m_1+m_2)x}$$

Universidad de Antioquia Depto de Matemáticas

$$= \underbrace{(m_1 - m_2)}_{\neq 0} \underbrace{e^{(m_1+m_2)x}}_{> 0}$$

$\Rightarrow \neq 0$ por tanto y_1, y_2 son linealmente independientes.

Ejemplo 9. $y_1 = e^{mx},\ y_2 = xe^{mx}$. Hallar $W(y_1, y_2)$.
Solución: más adelante veremos que $y_1,\ \ y_2$ son soluciones de una E.D. lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} e^{mx} & xe^{mx} \\ me^{mx} & mxe^{mx} + e^{mx} \end{vmatrix} \\ &= mxe^{2mx} + e^{2mx} - mxe^{2mx} \\ &= e^{2mx} > 0 \\ &\Rightarrow y_1, y_2 \quad \text{son} \quad \text{linealmente independientes.} \end{aligned}$$

Ejemplo 10. $y_1 = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,\ y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x$. Hallar $W(y_1, y_2)$
Solución: más adelante veremos que $y_1,\ \ y_2$ son soluciones de una E.D. lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x & e^{\alpha x} \cos \beta x \\ \beta e^{\alpha x} \cos \beta x + \alpha e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x & -\beta e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} \\ &= -\beta e^{2\alpha x} \operatorname{sen}^2 \beta x + \alpha e^{2\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \cos \beta x - \beta e^{2\alpha x} \cos^2 \beta x - \alpha e^{2\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \cos \beta x \\ &= -\beta e^{2\alpha x} (\operatorname{sen}^2 \beta x + \cos^2 \beta x) \\ &= -\beta \underbrace{e^{2\alpha x}}_{> 0} \neq 0 \\ &\Rightarrow y_1, y_2 \quad \text{son} \quad \text{linealmente independientes.} \end{aligned}$$

Ejercicio 1. a) Comprobar que $y_1 = x^3$ y $y_2 = |x|^3$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
b) Comprobar que $W(y_1, y_2) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
c) Contradice esto el Teorema 4.5.?. Explicar por qué no.

Ejercicio 2. Sea $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, donde $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ son continuas en I y $a_2(x) \neq 0$ en I, por el teorema 4.4 existe una única solución y_1 que satisface las condiciones iniciales $y_1(x_0) = 1$ y $y_1'(x_0) = 0$, donde $x_0 \in I$. Similarmente existe una única solución y_2 que satisface las condiciones iniciales $y_2(x_0) = 0$ y $y_2'(x_0) = 1$. Probar que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en I.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

4.3. MÉTODO DE REDUCCIÓN DE ORDEN

FÓRMULA DE D'ALEMBERT (Construcción de una segunda solución a partir de una solución conocida).

Dada la E.D.O.: $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ con $a_2(x) \neq 0$ en I y $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ continuas en I; dividiendo en la E.D.O. original por $a_2(x)$ y haciendo $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$, se tiene:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y \;=\; 0 \text{ forma canónica} \tag{4.8}$$

Sea $y_1(x)$ una solución conocida de la E.D. en I y $y_1(x) \neq 0$ en I.

Supongamos $y(x) = u(x)y_1(x)$ y hallemos u tal que $y(x)$ sea una solución.

Derivando dos veces , $y' = uy_1' + u'y_1$ y $\quad y'' = uy_1'' + u'y_1' + u'y_1' + u''y_1$ y sustituyendo en la ecuación diferencial (4.8):

$$uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1 + P(x)(uy_1' + u'y_1) + Q(x)uy_1 = 0$$

$$u[\,y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + u''y_1 + u'[\,2y_1' + P(x)y_1] = 0$$

Luego, $u''y_1 + u'[\,2y_1' + P(x)y_1] = 0$

Hagamos $W = u'$ (éste cambio de variable reduce el orden)

$$y_1W' + W(2y_1' + P(x)y_1) = 0$$

$$W' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + P(x)\right)W = 0, \;\; \text{(lineal en } W \text{de primer orden)}$$

Su F.I.$= e^{\int\left(\frac{2y_1'}{y_1}+P(x)\right)\,dx} = e^{\ln y_1^2}e^{\int P(x)\,dx} = y_1^2e^{\int P(x)\,dx}$, luego

$$Wy_1^2e^{\int P(x)\,dx} = C$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

De donde

$$W = C\frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2} = u' = \frac{du}{dx}$$

e integrando

$$u = C\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx + C_1$$

Por lo tanto $y = uy_1 = \underbrace{Cy_1\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx + C_1y_1}_{\text{combinación lineal de } y_1 \text{ y } y_1\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx}$

Luego la segunda solución es $y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx$ con $y_1 \neq 0$ en I

Veamos que y_1 y y_2 son linealmente independientes:

$$\begin{aligned} W(y_1,y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_1\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2} \\ y_1' & y_1\frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2} + y_1'\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx \end{vmatrix} \\ &= e^{-\int P(x)\,dx} + y_1y_1'\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx - y_1y_1'\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx \\ &= e^{-\int P(x)\,dx} > 0 \end{aligned}$$

Luego y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de la E.D.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

En conclusión, si y_1 es una solución, con $y_1 \neq 0$ en I, entonces

$$y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx \text{ (Fórmula de D'Alembert)}$$

Nota: el método es aplicable también para E.D. no homogéneas:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

en este caso se supone $y(x) = u(x)y_1(x) = uy_1$ y se llega a la E.D. lineal en W de primer orden:

$$W' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + P(x)\right)W = \frac{f(x)}{y_1}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

y se continua de la misma manera anterior.

Ejemplo 11. Sea $x^2y'' - xy' + 2y = 0$, (E.D. de Cauchy), sabiendo que $y_1 = x\,\text{sen}\,(\ln x)$ es una solución de la E.D. Hallar y_2

Solución. Dividiendo por x^2 se tiene:

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$

Veremos más adelante que $y_1 = x\,\text{sen}\,(\ln x)$ es una solución de la ecuación de Cauchy, entonces la segunda solución es:

$$y_2 = x\,\text{sen}\,(\ln x)\int \frac{e^{-\int -\frac{1}{x}\,dx}}{x^2\,\text{sen}^2(\ln x)}\,dx = x\,\text{sen}\,(\ln x)\int \frac{e^{\ln(x)}}{x^2\,\text{sen}\,(\ln x)}\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= x\,\text{sen}\,(\ln x)\int \frac{x}{x^2\,\text{sen}\,(\ln x)}\,dx \\
&= x\,\text{sen}\,(\ln x)\int \frac{dx}{x\,\text{sen}^2(\ln x)}\,dx \qquad \left\{\begin{array}{ll} u &= \ln x \\ du &= \frac{dx}{x} \end{array}\right. \\
&= x\,\text{sen}\,(\ln x)\int \frac{du}{\text{sen}^2 u} \\
&= x\,\text{sen}\,(\ln x)\int \csc^2 u\,du = -x\,\text{sen}\,(\ln x)\cot u = -x\,\text{sen}\,(\ln x)\cot(\ln x) \\
&= -x\cos(\ln x)
\end{aligned}$$

La solución general es : $y = C_1y_1 + c_2y_2$

$$y = C_1x\,\text{sen}\,(\ln x) + C_2(-x\cos(\ln x))$$

$$y = C_1x\,\text{sen}\,(\ln x) + C_3x\cos(\ln x)$$

Utilizando el método de reducción de orden resolver los siguientes ejercicios.

Universidad de Antioquia. Depto. de Matemáticas

Ejercicio 1. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$ $y_1 = x^4$ es una solución. Hallar y_2 (**Rta.:** $y_2 = x^4 \ln|x|$)

Ejercicio 2. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ $y_1 = x^2$ es una solución. Hallar y_2 (**Rta.:** $y_2 = -\frac{1}{5x^3}$)

Ejercicio 3. $xy'' + y' = 0,\ y_1 = \ln x$ es una solución. Hallar y_2 (**Rta.:** $y = -1$)

Ejercicio 4. Hallar la solución general de $xy'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$. (**Rta.:** $y = c_1x + c_2x \int x^{-2}e^{\int f(x)\,dx}\,dx$)

Ejercicio 5. Hallar la solución general de $y'' - f(x)y' + (f(x) - 1)y = 0$ (**Rta.:** $y = c_1e^x + c_2e^x \int e^{[-2x+\int f(x)\,dx]}\,dx$)

Ejercicio 6. a) Si n es un entero positivo, hallar dos soluciones linealmente independientes de

$$xy'' - (x + n)y' + ny = 0$$

b)Hallar la solución general de la E.D. de la parte a) cuando $n = 1, 2, 3$ (**Rta.:** a) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^x \int x^n e^{-x}\,dx$, b) $y = c_1e^x + c_2(x + 1)$, $y = c_1e^x + c_2(x^2 + 2x + 2), y = c_1e^x + c_2(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$.)

Ejercicio 7: Utilizando el método de reducción de D'Alembert resolver la E.D. lineal no homogénea: $(x - 1)y'' - xy' + y = 1$ sabiendo que $y_1 = e^x$ es una solución a la homogénea asociada. Obsérvese que obtenemos una segunda solución y una solución particular.
(**Rta.:** $y = 1 + C_1x + C_2e^x$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

4.4. E.D. LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

4.4.1. E.D. LINEALES DE ORDEN DOS

Sabemos que $\frac{dy}{dx} + ay = 0$ es lineal de primer orden, donde $p(x) = a$. luego el $F.I. = e^{\int a\,dx} = e^{ax}$ y su solución es

$$ye^{ax} = C \Rightarrow y = Ce^{-ax}$$

Por similitud con la E.D.O. de primer orden y coeficientes constantes, vamos a suponer que la E.D. lineal de segundo orden y coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{4.9}$$

tiene por solución una función exponencial de la forma: $y = e^{mx}$, derivando dos veces se tiene

$$y' = me^{mx}, \qquad y'' = m^2e^{mx}$$

y sustituyendo en la E.D. (4.9): $am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$
luego

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

o sea que

$$am^2 + bm + c = 0,$$

la cual llamamos ecuación característica o ecuación auxiliar de la E.D.:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Con las raíces de la ecuación característica suceden tres casos:

1. Que tenga raíces reales y diferentes.

2. Que tenga raíces reales e iguales.

3. Que tenga raíces complejas conjugadas.

<u>Caso 1.</u> **Raíces reales y diferentes**
Si las raíces son m_1 y m_2, con $m_1 \neq m_2$, luego $y_1 = e^{m_1x}$ y $y_2 = e^{m_2x}$ son linealmente independientes y por tanto la solución general es

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}.$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejemplo 12 Hallar la solución general de $2y'' - 5y' - 3y = 0$
Solución:
Ecuación característica: $2m^2 - 5m - 3 = 0$

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$m_1 = 3 \ , \ m_2 = -\frac{1}{2}$$

La solución general es $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$

Caso 2. **Raíces reales e iguales:** en este caso las raíces son de multiplicidad dos.
Sea m (con multiplicidad 2) $\Rightarrow y_1 = e^{mx}$ es una solución.
Utilicemos el método de D'Alembert para hallar la segunda sulución de

$$ay'' + by' + cy = 0$$

dividiendo por a para conseguir la forma canónica, se tiene

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0.$$

$$y_2 \quad = \quad y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx = e^{mx} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}\,dx}}{e^{2mx}}\,dx$$

como $ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow am^2 + bm + c = 0$ (ecuación característica)
y sus raíces son $m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; pero como las raíces son iguales, entonces el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, por lo tanto $m_{1,2} = m = -\frac{b}{2a}$, luego:

$$y_2 \quad = \quad e^{mx} \int \frac{e^{\frac{-b}{a}x}}{e^{\left(2\frac{-b}{2a}x\right)}}\,dx = e^{mx} \int dx = xe^{mx}$$

luego la solución general es: $y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$

Ejemplo 13. $4y'' - 4y' + y = 0$. Hallar la solución general.
Solución:
Ecuación característica: $4m^2 - 4m + 1 = 0 = (2m-1)^2 = 0$ por lo tanto $m = \frac{1}{2}$ (con multiplicidad 2)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

La solución general es: $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 x e^{\frac{x}{2}}$

Caso 3. **Raíces complejas y conjugadas**
Supongamos que $m_1 = \alpha + \beta i$ es una raíz de la ecuación auxiliar y por tanto su conjugada $m_2 = \alpha - \beta i$ es la otra raíz, donde α es la parte real y β es la parte imaginaria; recordando que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ (Fórmula de Euler) entonces la solución general es

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = C_1 e^{\alpha x} e^{\beta i x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-\beta i x} \\ &= e^{\alpha x}(C_1 e^{\beta i x} + C_2 e^{-\beta i x}) = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen}\beta x] \\ &= e^{\alpha x}[K_1 \cos\beta x + K_2 \operatorname{sen}\beta x] \end{aligned}$$

En resumen, la solución general es:

$$y = K_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + K_2\, e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

Ejemplo 14. $y'' - 2y' + 3y = 0$
Solución:
Ecuación característica: $m^2 - 2m + 3 = 0$

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

sus raíces son $m_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \sqrt{2}i$
o sea que $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{2}$.
La solución general es

$$y = K_1 e^x \cos\sqrt{2}x + K_2 e^x \operatorname{sen}\sqrt{2}x$$

Nota: (i): observe que si $[D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2]y = 0$
entonces la ecuación característica es: $m^2 - 2\alpha m + \alpha^2 + \beta^2 = 0$
y las raíces son:

$$m = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2)}}{2} = \frac{2\alpha \pm 2\beta i}{2} = \alpha \pm \beta i$$

luego, la solución general es: $y = K_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + K_2\, e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$

(ii) Para la E.D.: $(D - a)y = 0$ la ecuación característica es

$$m - a = 0 \Rightarrow m = a$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

por lo tanto $y = Ce^{ax}$ es solución de $(D-a)y = 0$ y recíprocamente una solución de $(D-a)y = 0$ es $y = Ce^{ax}$.

Ejercicios. Hallar la solución general o la solución particular de los siguientes ejercicios:

1. $(D^2 + 2D - 3)y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1e^x + C_2e^{-3x}$)

2. $D^2 - 2D - 3)y = 0$ con $y(0) = 0, \;\; y'(0) = -4$
(**Rta.:** $y = e^{-x} - e^{3x}$)

3. $(D^2 - 6D + 9)y = 0$
(**Rta.:** $y = (C_1 + C_2x)e^{3x}$)

4. $(D^2 + 4D + 4)y = 0$ con $y(0) = 1, \;\; y'(0) = -1$
(**Rta.:** $y = (1 + x)e^{-2x}$)

5. $(D^2 - 2D + 2)y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1e^x \cos x + C_2e^x \operatorname{sen} x$)

6. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2x = 0, \;\; k > b > 0 \;\; \text{con} \;\; x(0) = 0, \; x'(0) = v_0$
(**Rta.:** $x = (\frac{v_0}{a})e^{-bt} \operatorname{sen} at$, donde $a = \sqrt{k^2 - b^2}$)

7. $y'' + 2iy' - 10y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1e^{3x} \cos x + C_2e^{-3x} \cos x - i(C_1e^{3x} \operatorname{sen} x + C_2e^{-3x} \operatorname{sen} x)$)

8. $y'' + iy' + 2y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + i(C_1 \operatorname{sen} x - C_2 \operatorname{sen} 2x)$)

4.4.2. E.D. LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE DOS

Sea

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

donde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ son constantes, entonces su polinomio característico es:

$$a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1m + a_0 = 0 = \; P_n(m)$$

Supongamos por ejemplo que este polinomio lo podemos factorizar así:

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$P_n(m) = (m-m_1)(m-m_2)(m-m_3)^3(m^2-2\alpha_1 m+\alpha_1^2+\beta_1^2)(m^2-2\alpha_2^2 m+\alpha_2^2+\beta_2^2)^2$

entonces la solución general esta dada por

$$\begin{aligned} y = & C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} + C_3e^{m_3x} + C_4xe^{m_3x} + C_5x^2e^{m_3x} + \\ & + C_6e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x + C_7e^{\alpha_1x}\operatorname{sen}\beta_1x + C_8e^{\alpha_2x}\cos\beta_2x + \\ & + C_9e^{\alpha_2x}\operatorname{sen}\beta_2x + C_{10}xe^{\alpha_2x}\cos\beta_2x + C_{11}xe^{\alpha_2x}\operatorname{sen}\beta_2x \end{aligned}$$

Ejemplo 15. $2\frac{d^5y}{dx^5} - 7\frac{d^4y}{dx^4} + 12\frac{d^3y}{dx^3} + 8\frac{d^2y}{dx^2} = 0$
<u>Solución</u>:

En la E.D. reemplazo en cada $\frac{d^iy}{dx^i}$ por m^i y obtengo la ecuación característica:

$$2m^5 - 7m^4 + 12m^3 + 8m^2 = 0$$

$$m^2(2m^3 - 7m^2 + 12m + 8) = m^2(2m+1)(m^2 - 4m + 8) = 0$$

luego las raíces son $m_1 = 0$ con multiplicidad 2, $\quad m_2 = -\frac{1}{2}$

$$m_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2 \pm 2i \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 2$$

Para el factor m^2, como el grado es 2, empezamos con la solución básica e^{0x} y luego multiplicamos por x y así sucesivamente. O sea que las soluciones serían: $e^{0x} = 1, \quad xe^{0x} = x$

Para el factor $2m+1$ la solución sería: $e^{-\frac{x}{2}}$

Para el factor $m^2 - 4m + 8$ las soluciones serían: $e^{2x}\cos 2x, \quad e^{2x}\operatorname{sen} 2x$.

Solución general: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-\frac{x}{2}} + C_4e^{2x}\cos(2x) + C_5e^{2x}\operatorname{sen}(2x)$

Hallar la solución general o la solución particular según el caso en los siguientes ejercicios:
Ejercicio 1. $y^{(5)} + 5y^{(4)} - 2y''' - 10y'' + y' + 5y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + C_5e^{-5x}$)

Ejercicio 2. $16\frac{d^4y}{dx^4} + 24\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4x\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejercicio 3. $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0$
(**Rta.:** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4e^{-\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$)

Ejercicio 4. $\frac{d^4y}{dx^4} - 7\frac{d^2y}{dx^2} - 18y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3\cos\sqrt{2}x + C_4\operatorname{sen}\sqrt{2}x$)

Ejercicio 5. $\frac{d^4y}{dx^4} + y = 0$, (Ayuda: Completar cuadrados).
(**Rta.:** $y = C_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_3e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x$)

Ejercicio 6. $(D^2 + 4D + 4)y = 0$ tal que tenga una solución que pase por los puntos $(0, 2)$, $(2, 0)$
(**Rta.:** $y = (2 - x)e^{-2x}$)

Ejercicio 7. $(D^3 + D^2 - D - 1)y = 0$ con las siguientes condiciones: $y(0) = 1$, $y(2) = 0$ y $\lim y(x)_{x\to\infty} = 0$
(**Rta.:** $y = (1 - \frac{1}{2}x)e^{-x}$)

Ejercicio 8. Hallar el núcleo del siguiente operador diferencial: $L(D) = D^4 + D^3 + D^2$. (**Rta.:** $NucL(D) = \langle 1, x, e^{-\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x), e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\rangle$)

4.5. OPERADOR ANULADOR

Definición 4.5. *Si $y = f(x)$ una función que tiene n derivadas y $L(D)$ es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes, tal que*

$$L(D)y = L(D)f(x) = 0,$$

entonces decimos que el operador $L(D)$ es el anulador de $y = f(x)$.

Observaciones:

1. a) Si $y = k$ constante, entonces $\frac{dk}{dx} = 0 \Rightarrow D = \frac{d}{dx}$ es el anulador de k.

   b) Si $y = x$, entonces $\frac{d^2x}{dx^2} = 0 \Rightarrow D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ es el anulador de x y de k.

   c) Si $y = x^2$, entonces $\frac{d^3}{dx^3}(x^2) = 0 \Rightarrow D^3 = \frac{d^3}{dx^3}$ es el anulador de x^2, x, k.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

d) Si $y = x^n$, entonces $\frac{d^{n+1}x^n}{dx^{n+1}} = 0 \Rightarrow D^{n+1} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}$ es el anulador de $x^n, x^{n-1}, \cdots, x^2, x^1, k$ con $n \in \mathbf{N}$.

Nota: Observemos que $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}$ anula la combinación lineal

$$C_1 k + C_2 x + \cdots + C_{n+1} x^n$$

que es un polinomio de grado n.

2. $(D-a)^n$ es el anulador de las siguientes funciones:

$$e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, \cdots, x^{n-1}e^{ax}$$

y también el anulador de la combinación lineal siguiente:

$$C_1e^{ax} + C_2xe^{ax} + C_3x^2e^{ax} + \cdots + C_nx^{n-1}e^{ax} = P_{n-1}(x)e^{\alpha x}$$

3. $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^n$ es el anulador de las funciones:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

y también anula la combinación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2xe^{\alpha x}\cos\beta x + \cdots + C_nx^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x + \\ + k_1e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + k_2xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + \cdots + k_nx^{n-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \\ = P_{n-1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{n-1}(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \end{aligned}$$

donde $P_{n-1}(x)$ y $Q_{n-1}(x)$ son polinomios de grado $n-1$.

Si $\alpha = 0$, entonces $(D^2 + \beta^2)^n$ es el anulador de:

$$\cos\beta x, x\cos\beta x, x^2\cos\beta x, \cdots, x^{n-1}\cos\beta x$$

$$\operatorname{sen}\beta x, x\operatorname{sen}\beta x, x^2\operatorname{sen}\beta x, \cdots, x^{n-1}\operatorname{sen}\beta x$$

y de sus combinaciones lineales:

$$C_1\cos\beta x + C_2x\cos\beta x + \cdots + C_nx^{n-1}\cos\beta x + k_1\operatorname{sen}\beta x + k_2x\operatorname{sen}\beta x + \cdots + k_nx^{n-1}\operatorname{sen}\beta x = P_{n-1}(x)\cos\beta x + Q_{n-1}(x)\operatorname{sen}\beta x$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Si $n = 1$ y $\alpha = 0$, entonces $D^2 + \beta^2$ es el anulador de: $\cos \beta x$, $\operatorname{sen} \beta x$ o su combinación lineal: $C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x$.

Ejemplo 16. Hallar el operador anulador de: $e^x + 2xe^x - x^2e^x$
Solución:
Anulador de e^x : $D - 1$.
Anulador de xe^x : $(D-1)^2$.
Anulador de x^2e^x : $(D-1)^3$.
Por lo tanto el anulador de toda la expresión es: $(D-1)^3$

Obsérvese que para hallar el anulador, no interesan las coeficientes $1, 2, -1$ de la expresión original.

Ejemplo 17. Hallar el operador anulador de: $3 + e^x \cos 2x$
Solución:
Anulador de 3: D.
Anulador de $e^x \cos 2x$: $D^2 - 2D + 1 + 4 = D^2 - 2D + 5$, en este caso $\alpha = 1$ y $\beta = 2$.
Anulador de toda la expresión: $D(D^2 - 2D + 5)$.

Ejemplo 18. Hallar el operador anulador de: $13x + 9x^2 - \operatorname{sen} 4x$
Solución:
Anulador de x: D^2.
Anulador de x^2: D^3.
Anulador de $\operatorname{sen} 4x$: $D^2 + 16$ en este caso $\alpha = 0$ y $\beta = 4$.
Anulador de toda la expresión: $D^3(D^2 + 16)$.

Ejemplo 19. Hallar el operador anulador de: $(2 - e^x)^2$
Solución:
Como $(2 - e^x)^2 = 4 - 4e^x + e^{2x}$, entonces
Anulador de 4: D.
Anulador de e^x: $D - 1$.
Anulador de e^{2x}: $D - 2$.
El anulador de toda la expresión es: $D(D-1)(D-2)$

Ejercicio 1. Encontrar el operador anulador de $8x - \operatorname{sen} x + 10 \cos 5x$ (**Rta.:** $D^2(D^2+1)(D^2+25)$)

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

Ejercicio 2. Encontrar el operador anulador de $3 + e^x \cos 2x$
(**Rta.:** $D(D^2 - 2D + 5)$)

Ejercicio 3. Encontrar el operador anulador de $x^3(1 - 5x)$
(**Rta.:** D^5)

Ejercicio 4. Encontrar el operador anulador de $e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{2x} \cos x$
(**Rta.:** $(D^2 + 2D + 2)(D^2 - 4D + 5)$)

Ejercicio 5. Encontrar el operador anulador de $x^2 e^x + \operatorname{sen} 2x + 5$
(**Rta.:** $D(D - 1)^3(D^2 + 4)$)

Ejercicio 6. Las raíces de la ecuación característica de una cierta ecuación diferencial son: $m_1 = -2$ con multiplicidad dos, $m_{2,3} = -1 \pm 3i$. Hallar la ecuación diferencial.

Observación: la solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea, $L(D)y = f(x) \neq 0$ consta de la suma de dos soluciones que son:

i) La solución a la homogénea asociada, es decir, la solución de $L(D)y = 0$.

ii) La solución <u>particular</u> de la no homogénea.

La suma de las dos soluciones es la solución general, es decir, si y_h es la solución de la homogénea asociada $L(D)y = 0$ y y_p es la solución particular de $L(D)y = f(x)$, entonces la solución general es: $y = y_h + y_p$. En efecto,

$$L(D)(y_h + y_p) = L(D)y_h + L(D)y_p = 0 + f(x) = f(x)$$

Las siguientes secciones las dedicaremos a desarrollar tres métodos para hallar la solución particular de E.D. no homogéneas. El primer método se llama de Coeficientes Indeterminados, el segundo método se llama de Variación de Parámetros y el tercer método se llama de los Operadores Inversos.

4.6. COEFICIENTES INDETERMINADOS

Este método se aplica a E.D. lineales, con coeficientes constantes, no homogéneas.

Sea $L(D)y = f(x)$ una E.D. lineal, no homogénea, de coeficientes constantes y de orden n. Si $f(x)$ tiene una de las siguientes formas:

a) $f(x) = k$, k constante

b) $f(x) =$ polinomio en x

c) $f(x) =$ exponencial de la forma $e^{\alpha x}$

Universidad de Antioquia. Depto. de Matemáticas

d) $f(x) = \cos\beta x, \quad f(x) = \operatorname{sen}\beta x$
e) $f(x) =$ a sumas finitas de productos finitos de las expresiones anteriores, entonces es posible encontrar un operador $L_1(D)$ que anule a $f(x)$ y si esto sucede, entonces aplicamos $L_1(D)$ a la ecuación diferencial original, es decir:

$$L_1(D)L(D)y = L_1(D)f(x) = 0$$

Por lo tanto la expresión anterior es una E.D. lineal, homogénea de coeficientes constantes, le aplicamos a esta ecuación el método de las homogéneas y hallamos su solución general, de esta solución general descartamos la parte correspondiente a la homogénea asociada a la E.D. original, la parte restante corresponde a la solución particular que estamos buscando. Ilustremos esto con un ejemplo.

Ejemplo 20. Hallar la solución particular y la solución general de la E.D. $y'' + 25y = 20\operatorname{sen}5x$.
<u>Solución</u>:

El anulador de $\operatorname{sen}5x$: $D^2 + 25 = L_1(D)$
Aplicamos este anulador a ambos lados de la E.D. original:

$$\begin{aligned} y'' + 25y &= 20\operatorname{sen}5x \\ L_1(D)(y'' + 25y) &= L_1(D)(20\operatorname{sen}5x) \\ (D^2+25)(y''+25y) &= (D^2+25)(20\operatorname{sen}5x) \\ (D^2+25)^2 y &= 0 \end{aligned}$$

Ecuación característica: $(m^2 + 25)^2 = 0$ cuyas raíces son $m = \pm 5i$ con multiplicidad 2 y por lo tanto $\alpha = 0$ y $\beta = 5$; en consecuencia la solución general es:

$$y = C_1\cos 5x + C_2\operatorname{sen}5x + C_3\, x\cos 5x + C_4 x\operatorname{sen}5x \tag{4.10}$$

La ecuación diferencial homogénea asociada es

$$(D^2 + 25)y = 0$$

y su ecuación característica es

$$m^2 + 25 = 0,$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

o sea que $m = \pm 5i$ (con $\alpha = 0$ y $\beta = 5$) y su solución es

$$y = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x;$$

y por tanto en (4.10) descartamos esta expresión y nos queda la forma de la solución particular:

$$y = C_3 x \cos 5x + C_4 x \operatorname{sen} 5x = y_p$$

Como aparecen las constantes C_3 y C_4, las hallamos de la siguiente manera: derivamos dos veces y_p y la sustituimos en la E.D. original:

$$\begin{aligned}
y_p' &= C_3(-5x \operatorname{sen} 5x + \cos 5x) + C_4(5x \cos 5x + \operatorname{sen} 5x) \\
y_p'' &= C_3(-25x \cos 5x - 5 \operatorname{sen} 5x - 5 \operatorname{sen} 5x) + \\
&\quad + C_4(-25x \operatorname{sen} 5x + 5 \cos 5x + 5 \cos 5x) \\
&= C_3(-25x \cos 5x - 10 \operatorname{sen} 5x) + \\
&\quad + C_4(-25x \operatorname{sen} 5x + 10 \cos 5x) \\
y_p'' + 25 y_p &= 20 \operatorname{sen} 5x
\end{aligned}$$

$C_3(-25x \cos 5x - 10 \operatorname{sen} 5x) + C_4(-25x \operatorname{sen} 5x + 10 \cos 5x) +$
$+ 25(C_3 x \cos 5x + C_4 x \operatorname{sen} 5x) = 20 \operatorname{sen} 5x$

Análisis de coeficientes:
en $x \cos 5x : -25C_3 + 25C_3 = 0$
en $\operatorname{sen} 5x : -10C_3 = 20 \Rightarrow C_3 = -2$
en $x \operatorname{sen} 5x : -25C_4 + 25C_4 = 0$
en $\cos 5x : 10C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

Por lo tanto la solución particular es $y_p = -2x \cos 5x$
y la solución general es:
$y = y_h + y_p =$
$= C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x + C_3 x \cos 5x = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x - 2x \cos 5x$

Hallar la solución general en los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}$
(**Rta:** $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{12} x^4 e^{-x}$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejercicio 2. $y'' - y = x^2e^x + 5$
(**Rta:** $y = C_2e^x + C_6e^{-x} - 5 + \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{4}x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x$)

Ejercicio 3. $y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^x(\operatorname{sen} 3x - \cos 3x)$

Ejercicio 4. $y'' + 4y = \cos^2 x$
(**Rta:** $y = \frac{1}{8} + C_2 \cos 2x + C_3 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}x \operatorname{sen} 2x$)

Ejercicio 5. $y'' + y' + y = x \operatorname{sen} x$
(**Rta:** $y = C_1e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x - x\cos x + 2\cos x + \operatorname{sen} x$)

Ejercicio 6. $y'' - y = 3xe^x \cos 2x$

Ejercicio 7. $y'' + 25y = 6 \operatorname{sen} x$
(**Rta:** $y = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} x$)

Ejercicio 8. $y'' - 2y' + 5y = e^x \operatorname{sen} x$
(**Rta:** $y = C_1e^x \cos 2x + C_2e^x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}e^x \operatorname{sen} x$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

4.7. VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Sea

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = h(x)$$

con $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$, continuas en I y $a_2(x) \neq 0$ en I.
La escribimos en forma canónica

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x)$$

Donde

$$p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \qquad g(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)} \qquad \text{y} \qquad f(x) = \frac{h(x)}{a_2(x)},$$

suponemos que y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la homogénea asociada, es decir,

$$y_1'' + p(x)y_1' + g(x)y_1 = 0$$
$$y_2'' + p(x)y_2' + g(x)y_2 = 0$$

$$\text{y} \qquad y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Variemos los parámetros C_1 y C_2, es decir,

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

y hallemos u_1 y u_2 de tal manera que y_p sea solución de la E.D.
Luego $y_p' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + y_2' u_2$

Supongamos (en aras de disminuir el trabajo operativo):

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0, \qquad \text{(primera condición).}$$

Luego,

$$\begin{aligned} y_p' &= u_1 y_1' + u_2 y_2' \\ y_p'' &= u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$y_p'' + p\,(x) y_p' + g\,(x) y_p = f(x)$$

$$u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' + p\,(x)\left[u_1 y_1' + u_2 y_2'\right] + g\,(x)\left[u_1 y_1 + u_2 y_2\right] = f\,(x)$$

$$u_1\left[y_1'' + p\,(x) y_1' + g\,(x) y_1\right] + u_2\left[y_2'' + p\,(x) y_2' + g\,(x) y_2\right] + u_1' y_1' + u_2' y_2' = f\,(x)$$

Luego,

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f\,(x)$$

En resumen,

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' &= 0 \quad \text{(primera condición)} \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' &= f\,(x) \quad \text{(segunda condición)} \end{aligned}$$

que es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: u_1' y u_2'.

Por la regla de Cramer:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_2\, f\,(x)}{W(y_1, y_2)}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x)' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)}$$

Donde $W(y_1, y_2) \neq 0$, ya que y_1 y y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la homogénea asociada. Para conseguir u_1 y u_2, integramos (no es necesario constantes de integración, porqué?) a u_1' y u_2' respectivamente. Luego, la $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$,
y la solución general es

$$y = y_h + y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2$$

Pasos para resolver la E.D. (en forma canónica):
$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x)$

1. Hallamos y_1 y y_2 soluciones linealmente independientes de la homogénea asociada:
$$y'' + p(x)y' + g(x)y = 0$$
2. Hallamos $W(y_1, y_2)$
3. Hallamos $u_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)}$, $\qquad u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)}$
4. Integramos $u_1 = \int u_1'\, dx$ y $u_2 = \int u_2'\, dx$ (sin constantes de integración)
5. La solución particular $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$
6. La solución general $y = y_h + y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2$

Ejemplo 21. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$
<u>Solución</u>:

1. Solución de $y'' + 3y' + 2y = 0$, luego su ecuación caracterítica es
$m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow (m+2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = -2,\ m = -1$
$y_h = C_1 \underbrace{e^{-2x}}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^{-x}}_{y_2}$
2. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-3x} + 2e^{-3x} = e^{-3x}$

Universidad de Antioquia, Depto de Matemáticas

3. $u_1' = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)} = \frac{-e^{-x}\operatorname{sen}(e^x)}{e^{-3x}} = -e^{2x}\operatorname{sen}(e^x)$
   $u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)} = \frac{e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)}{e^{-3x}} = e^x\operatorname{sen}(e^x)$

4.

$$u_1 = \int u_1'\,dx = \int -e^{2x}\operatorname{sen}(e^x)\,dx \text{ y haciendo } \left\{\begin{array}{lcl} z & = & e^x \\ dz & = & e^x\,dx \\ dx & = & \frac{dz}{z} \end{array}\right.$$

$$= -\int z^2\operatorname{sen}(z)\,\frac{dz}{z}$$

$$= -\int z\operatorname{sen}(z)\,dz \quad \left\{\begin{array}{lcl} & & \text{integrando por partes} \\ v & = & z \Rightarrow dv = dz \\ dw & = & -\operatorname{sen} z dz \Rightarrow w = \cos z \end{array}\right.$$

$$= z\cos z - \int \cos z\,dz = z\cos z - \operatorname{sen} z = e^x\cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x)$$

$$u_2 = \int u_2'\,dx = \int e^x\operatorname{sen}(e^x)\,dx = \int z\operatorname{sen} z\frac{dz}{z} = \int \operatorname{sen} z\,dz = -\cos z$$
$$= -\cos(e^x)$$

5. La solución particular y la solución general son:

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 = [e^x\cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x)]\,e^{-2x} - e^{-x}\cos(e^x) \\ &= -e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x) \\ y &= y_h + y_p = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x) \end{aligned}$$

Ejemplo 22. Si $y_1 = x$ y $y_2 = x\ln x$ son soluciones linealmente independientes de la E.D. $x^2y'' - xy' + y = 0$. Hallar la solución general de la E.D. de Cauchy.

$$x^2y'' - xy' + y = 4x\ln x$$

<u>Solución.</u> Coloquemos la E.D. en forma canónica

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 4\frac{\ln x}{x},\ x \neq 0$$

1. $y_1 = x, \quad y_2 = x\ln x$

2. $W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} = x\ln x + x - x\ln x = x \neq 0$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

3. $u_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)} = \frac{-x\ln x\left(\frac{4\ln x}{x}\right)}{x} = -\frac{4\ln^2 x}{x}$
   $u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)} = \frac{x\left(\frac{4\ln x}{x}\right)}{x} = \frac{4\ln x}{x}$

4. Hallemos uy u_2:

$$\begin{aligned} u_1 &= \int u_1'\,dx = -\int \frac{4\ln^2 x}{x}\,dx \quad \text{y haciendo} \left\{ \begin{array}{lcl} z &=& \ln x \\ dz &=& \frac{dx}{x} \end{array} \right. \\ &= -\frac{4}{3}\ln^3 x \\ u_2 &= \int u_2'\,dx = \int \frac{4\ln x}{x}\,dx \quad \text{y haciendo} \left\{ \begin{array}{lcl} z &=& \ln x \\ dz &=& \frac{dx}{x} \end{array} \right. \\ &= 2\ln^2 x \end{aligned}$$

5. La solución particular es:

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= \left(-\frac{4}{3}\ln^3 x\right)x + (2\ln^2 x)x\ln x \\ &= -\frac{4}{3}x\ln^3 x + 2x\ln^3 x = \frac{2}{3}x\ln^3 x \end{aligned}$$

6. La solución general es

$$y = y_h + y_p = C_1 x + C_2 x\ln x + \frac{2}{3}x\ln^3 x$$

Ejemplo 23. Utilizar el método de variación de parámetros para resolver la siguiente E.D.

$$y'' - y = \sec^3 x - \sec x$$

<u>Solución</u>:

1. $y'' - y = 0$ (homogénea asociada)
   La ecuación característica es $m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$
   La solución a la homogénea asociada es $y_h = C_1 \underbrace{e^x}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^{-x}}_{y_2}$

2. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x(e^{-x}) = -1 - 1 = -2$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

3. $u_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)} = -\frac{e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)}{-2} = \frac{e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)}{2}$

   $u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)} = \frac{e^{x}(\sec^3 x - \sec x)}{-2} = -\frac{e^{x}}{2}(\sec^3 x - \sec x)$

4. Hallemos u_1 y u_2:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x}\sec x(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int e^{-x}\sec x\tan^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec x\tan x)\tan x\,dx \end{aligned}$$

Integremos por partes, haciendo:

$$u = e^{-x}\tan x, \quad dv = \tan x\sec x\,dx,$$

luego

$$du = (-e^{-x}\tan x + e^{-x}\sec^2 x)\,dx, \qquad v = \sec x$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\left[e^{-x}\tan x\sec x - \int e^{-x}\sec x(\sec^2 x - \tan x)\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{-x}\tan x\sec x - \int e^{-x}\sec^3 x\,dx + \int e^{-x}\sec x\tan x\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{-x}\tan x\sec x - \int e^{-x}\sec^3 x\,dx + e^{-x}\sec x + \int e^{-x}\sec x\,dx\right] \\ &= \frac{e^{-x}}{2}\tan x\sec x + \frac{e^{-x}}{2}\sec x - \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx, \end{aligned}$$

despejando la integral :

$$\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx = \frac{e^{-x}}{2}\tan x\sec x + \frac{e^{-x}}{2}\sec x$$

$$u_1 = \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx = \frac{e^{-x}}{4}\tan x\sec x + \frac{e^{-x}}{4}\sec x$$

$$u_2 = \int u_2'\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

hagamos: $z = -x\,, dz = -dx$

$$
\begin{aligned}
u_2 &= -\frac{1}{2}\int e^{-z}(\sec^3(-z) - \sec(-z))\,d(-z) = \frac{1}{2}\int e^{-z}(\sec^3 z - \sec z)\,dz \\
&= \frac{e^{-z}}{4}\tan z \sec z + \frac{e^{-z}}{4}\sec z = \frac{e^{x}}{4}\tan(-x)\sec(-x) + \frac{e^{x}}{4}\sec(-x) \\
&= -\frac{e^{x}}{4}\tan x \sec x + \frac{e^{x}}{4}\sec x
\end{aligned}
$$

5. La solución particular es

$$
\begin{aligned}
y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\
&= (\frac{e^{-x}}{4}\tan x \sec x + \frac{e^{-x}}{4}\sec x)e^{x} + (-\frac{e^{x}}{4}\tan x \sec x + \frac{e^{x}}{4}\sec x)e^{-x} \\
&= \frac{\sec x}{2}
\end{aligned}
$$

6. La solución general es

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{\sec x}{2}$$

Utilizar el método de variación de parámetros para resolver los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. Hallar la solución general de
$(D^2+1)y = -x^{-2}\operatorname{sen} x + 2x^{-1}\cos x$
(**Rta.:** $y = C_1\cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \ln|x|\operatorname{sen} x$)

Ejercicio 2. Hallar la solución general de
$(D^2+5D+6)y = e^{-2x}\sec^2 x(1+2\tan x)$
(**Rta.:** $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + e^{-2x}\tan x$)

Ejercicio 3. Hallar la solución general de
$y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$
(**Rta.:** $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{x^2}{2}e^{-x}\ln x - \frac{3}{4}x^2 e^{-x}$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejercicio 4. Si $y_1 = x^{-\frac{1}{2}} \cos x$, $y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x$ forman un conjunto linealmente independiente y son soluciones de $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$. Hallar la solución general para $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = x^{\frac{3}{2}}$.
(**Rta.:** $y = C_1x^{-\frac{1}{2}} \cos x + C_2x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x + x^{-\frac{1}{2}}$)

Ejercicio 5. Si $y_1 = x$, $y_2 = e^x$ forman un conjunto linealmente independiente y son soluciones de la homogénea asociada de la E.D.

$$(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2e^{-x}, \quad 0 < x < 1.$$

Hallar la solución general.
(**Rta.:** $y = C_1x + C_2e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - xe^{-x}$)

Ejercicio 6. Hallar la solución general de la E.D. $(D^2 + 16)y = \csc 4x$
(**Rta.:** $y = C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{4}x \cos 4x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 4x \ln|\operatorname{sen} 4x|$)

Ejercicio 7. Hallar la solución general de la E.D. $(D^2 + 1)y = \sec x$
(**Rta.:** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + \cos x \ln|\cos x|$)

Ejercicio 8. Hallar la solución general de la E.D. $(D^2 + 2D + 5)y = e^{-x} \sec 2x$
(**Rta.:** $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) + e^{-x}(\frac{1}{2}x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln|\cos 2x|)$)

Ejercicio 9. Hallar la solución general de la E.D.

$$(D^2 - 1)y = e^{-x} \operatorname{sen}(e^{-x}) + \cos(e^{-x})$$

(**Rta.:** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - e^x \operatorname{sen}(e^{-x})$)

Ejercicio 10. Hallar la solución general de la E.D. $(D^2 + 1)y = \sec^3 x$
(**Rta.:** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \sec x$)

Ejercicio 11. Hallar la solución general de la E.D.

$$(D^2 - 9D + 18)y = e^{e^{-3x}}$$

(**Rta.:** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{6x} + \frac{1}{9}e^{6x}e^{e^{-3x}}$)

Ejercicio 12. Hallar la solución general de la E.D. $(D^2 - 2D + D^0)y = x^{-5}e^x$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

(**Rta.:** $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{12}x^{-3}e^x$)

Ejercicio 13. Hallar la solución general de la E.D.

$$(D^2 + 2D - 8)y = (6x^{-1} - x^{-2})e^{2x}$$

(**Rta.:** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} + e^{2x}\ln|x|$)

Ejercicio 14. Hallar la solución del P.V.I.

$$(D^2 + 1)y = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}, \quad y(\pi) = y'(\pi) = 0$$

(**Rta.:** $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\pi \frac{\operatorname{sen}(t-x)}{\sqrt{t}}\,dt$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

4.7.1. GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Dada la E.D. en forma canónica:

$$D^ny + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \ldots + a_1(x)Dy + a_0(x)y = f(x)$$

efectuamos los siguientes pasos:

1. Hallamos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones linealmente independientes de la homogénea asociada, o sea que $y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$
2. Hallamos $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$
3. Hallamos $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ por el método de Cramer del sistema:

$$\begin{array}{l} u_1'y_1 + u_2'y_2 + \ldots + u_n'y_n = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' + \ldots + u_n'y_n' = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ u_1'y_1^{n-1} + u_2'y_2^{n-1} + \ldots + u_n'y_n^{n-1} = f(x) \end{array}$$

4. Integramos $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ (sin constantes de integración) para hallar $u_1, u_2, \ldots, u_n$

5. Hallamos la solución particular

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n$$

6. Hallamos la solución general

$$y = y_h + y_p = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n + u_1 y_1 + \ldots + u_n y_n$$

Ejemplo 24. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{3x}$
<u>Solución</u>:

1. La homogénea asociada es $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$
La ecuación característica es
$m^3 - 2m^2 - m + 2 = m^2(m-2) - (m-2) = (m-2)(m^2-1) =$
$= (m-2)(m+1)(m-1) = 0$ Pot lo tanto las raíces son
$m_1 = 2, \quad m_2 = -1, \quad m_3 = 1$ y la solución a la homogénea es
$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x}$

2. El Wronskiano es

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2, y_3) &= \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} & e^{x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} & e^{x} \\ 4e^{2x} & e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix} \\ &= e^{2x}(-1-1) - e^{-x}(2e^{3x} - 4e^{3x}) + e^{x}(2e^{x} + 4e^{x}) \\ &= -2e^{2x} + 2e^{2x} + 6e^{2x} = 6e^{2x} \end{aligned}$$

3.

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} & e^{x} \\ 0 & -e^{-x} & e^{x} \\ e^{3x} & e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix}}{6e^{2x}} = \frac{e^{3x}(1+1)}{6e^{2x}} = \frac{2e^{3x}}{6e^{2x}} = \frac{e^{x}}{3}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 & e^{x} \\ 2e^{2x} & 0 & e^{x} \\ 4e^{2x} & e^{3x} & e^{x} \end{vmatrix}}{6e^{2x}} = -\frac{e^{3x}(e^{3x} - 2e^{3x})}{6e^{2x}} = \frac{e^{6x}}{6e^{2x}} = \frac{e^{4x}}{6}$$

Universidad de Antioquia Depto. de Matemáticas

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} & 0 \\ 2e^{2x} & -e^{-x} & 0 \\ 4e^{2x} & e^{-x} & e^{3x} \end{vmatrix}}{6e^{2x}} = \frac{e^{3x}(-e^x - 2e^x)}{6e^{2x}} = -\frac{3e^{4x}}{6e^{2x}} = -\frac{e^{2x}}{2}$$

4. Integramos u_1', u_2', u_3'

$$\begin{aligned} u_1 &= \int u_1'\,dx = \int \frac{e^x}{3}\,dx = \frac{e^x}{3} \\ u_2 &= \int u_2'\,dx = \int \frac{e^{4x}}{6}\,dx = \frac{e^{4x}}{24} \\ u_3 &= \int u_3'\,dx = \int -\frac{e^{2x}}{2}\,dx = -\frac{e^{2x}}{4} \end{aligned}$$

5. Solución particular:

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 = \frac{e^x}{3}e^{2x} + \frac{e^{4x}}{24}e^{-x} - \frac{e^{2x}}{4}e^x = \frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{3x}}{24} - \frac{e^{3x}}{4} \\ &= \frac{3e^{3x}}{24} = \frac{e^{3x}}{8} \end{aligned}$$

6. Solución general:
$y = y_h + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + C_3e^x + \frac{e^{3x}}{8}$

Resolver, utilizando el método de variación de parámetros, los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. $y''' - 5y'' + 6y' = 2\,\mathrm{sen}\,x + 8$
(**Rta.:** $y = C_1 + C_2e^{3x} + C_3e^{2x} - \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,x + \frac{4}{3}x$)

Ejercicio 2. $y''' - y' = \mathrm{sen}\,x$
(**Rta.:** $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x$)

Ejercicio 3. $y''' - y' = x\,e^x$
Sugerencia: $\left(\frac{d}{dx}\right)(y'' - y) = y''' - y'$; integre y después use variación de parámetros.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

(**Rta.:** $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} + \frac{1}{4}x^2e^x - \frac{3}{4}xe^x$)

Ejercicio 4. $y''' + 4y' = \operatorname{sen} x \cos x$
(**Rta.:** $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16}x \operatorname{sen} 2x$)

Ejercicio 5. Hallar la solución general de la E.D.

$$(D+1)^3y = 16(2x+3)^{-1}e^{-x}$$

(**Rta.:** $y = e^{-x}(C_1 + C_2x + C_3x^2) + e^{-x}(2x+3)^2 \ln(2x+3)$)

4.8. OPERADORES

Lema 4.2.

Si $f \in C^n(I)$ y $a \in \mathbb{R}$ (o $a \in \mathbb{C}$) entonces:

1. $D^n(e^{ax}f(x)) = e^{ax}(D+a)^n f(x)$
2. $D^n(e^{ax}) = e^{ax} \underbrace{a^n}_{\#Real}$

Demostración. Veamos 1. Por inducción:

$$n = 1 \quad D(e^{ax}f(x)) = e^{ax}Df(x) + f(x)ae^{ax} = e^{ax}(D+a)f(x)$$

Supongamos que se cumple para $n = k$:

$$D^k(e^{ax}f(x)) = e^{ax}(D+a)^k f(x)$$

y veamos que se cumple para $n = k+1$. En efecto, teniendo en cuenta las hipótesis de inducción para $n = 1$ y para $n = k$, se tiene

$$\begin{aligned} D^{k+1}(e^{ax}f(x)) &= D^kD(e^{ax}f(x)) = D^k(e^{ax}(D+a)f(x)) \\ &= e^{ax}(D+a)^k(D+a)f(x) = e^{ax}(D+a)^{k+1}f(x) \end{aligned}$$

Veamos 2. Por inducción:

$$n = 1 \quad D(e^{ax}) = ae^{ax}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Supongamos que se cumple para $n = k$:

$$D^k(e^{ax}) = a^k e^{ax}$$

y veamos que se cumple para $n = k + 1$. En efecto, teniendo en cuenta las hipótesis de inducción para $n = 1$ y para $n = k$, se tiene

$$\begin{aligned} D^{k+1}(e^{ax}) &= D^k D(e^{ax}) = D^k(ae^{ax}) \\ &= a(D^k e^{ax}) = a(a^k e^{ax}) = a^{k+1}e^{ax} \end{aligned}$$ ■

El siguiente Teorema, llamado teorema básico de los operadores, nos permite sacar una exponencial que está dentro de un operador.

Teorema 4.7 (**Teorema Básico de Operadores**).

1. *Si $f \in C^n(I)$ y $L(D)$ es un operador diferencial lineal y $a \in \mathbb{R}$ (o $a \in \mathbb{C}$), entonces: $L(D)(e^{ax}f(x)) = e^{ax}L(D+a)f(x)$*

2. $L(D)e^{ax} = L(a)e^{ax}$

Demostración: 1.

$$\begin{aligned} &L(D)(e^{ax}f(x)) = (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + a_1(x)D + a_0(x)D^0)(e^{ax}f(x)) \\ &= a_n(x)D^n(e^{ax}f(x)) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(e^{ax}f(x)) + \ldots + a_1(x)D(e^{ax}f(x)) + \\ &+ a_0(x)e^{ax}f(x) \\ &= a_n(x)e^{ax}(D+a)^n f(x) + a_{n-1}(x)e^{ax}(D+a)^{n-1}f(x) + \ldots + a_1(x)e^{ax}(D+a)f(x) \\ &+ a_0(x)e^{ax}f(x) \\ &= e^{ax}(a_n(x)(D+a)^n + a_{n-1}(x)(D+a)^{n-1} + \ldots + a_1(x)(D+a) + a_0(x))f(x) \\ &= e^{ax}L(D+a)f(x) \end{aligned}$$ ■

Nota: para entrar una expresión exponencial dentro de un operador, utilizamos la siguiente expresión,

$$e^{ax}L(D)f(x) = L(D-a)(e^{ax}f(x)) \tag{4.11}$$

Ejemplo 25. Comprobar que $(D+2)(D-2)^3(x^2e^{2x}) = 0$
<u>Solución</u>:

$$(D+2)(D-2)^3(x^2e^{2x}) = e^{2x}(D+2+2)(D+2-2)^3x^2 = e^{2x}(D+4)D^3x^2 = 0$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejemplo 26. Comprobar que $(D-3)^n(e^{3x}\,x^n) = n!e^{3x}$
Solución:

$$(D-3)^n(e^{3x}x^n) = e^{3x}(D+3-3)^n x^n = e^{3x}D^n x^n = n!e^{3x}$$

Ejemplo 27. Entrar la exponencial dentro del operador: $e^{-3x}(D-1)(D-3)x$
Solución:

$$\begin{aligned} e^{-3x}(D-1)(D-3)x &= (D-(-3)-1)(D-(-3)-3)(e^{-3x}x) \\ &= (D+2)D(e^{-3x}x) \end{aligned}$$

4.9. OPERADORES INVERSOS

Dada la E.D. $L(D)y = f(x)$, donde $L(D)$ es un operador diferencial lineal de coeficientes constantes y $f(x)$ es un polinomio o exponencial o seno o coseno o sumas finitas de productos finitos de las anteriores, es conveniente resolver la E.D. por el método de los operadores inversos (es un método que sustituye el método de coeficientes indeterminados), este método también sirve para resolver integrales.

Definición 4.6. *Dada la E.D. $L(D)y = f(x)$ de coeficientes constantes, definimos el operador inverso $L^{-1}(D) = \frac{1}{L(D)}$, como el operador tal que: $L^{-1}(D)f(x)$ es una solución particular de la E.D., es decir, $y_p = L^{-1}(D)f(x)$.*

Nota:

1. $L(D)L^{-1}(D) =$ operador identidad y $L^{-1}(D)L(D) =$ operador identidad.
2. Solución general: $y = y_h + y_p = y_h + L^{-1}(D)f(x)$

Teorema 4.8.

Si y_1 y y_2 son soluciones particulares de la E.D. $L(D)y = f(x)$, entonces estas dos soluciones difieren en una solución que está en el núcleo de $L(D)$.

Demostración: sea $y = y_1 - y_2$, veamos que y pertenece al núcleo de $L(D)$. En efecto

$$L(D)y = L(D)(y_1 - y_2) = L(D)y_1 - L(D)y_2 = f(x) - f(x) = 0$$

luego y pertenece al núcleo de $L(D)$. ■

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matemáticas

Teorema 4.9.

Si $L(D) = D^n$ y $h(x)$ es una función continua, entonces una solución particular de la ecuación diferencial $D^n y = h(x)$ es

$$y_p = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{n \text{ veces}} h(x)\, \underbrace{dx\, dx \ldots dx}_{n \text{ veces}}$$

Demostración. Por inducción:
$n = 1 : Dy = h(x)$, su homogénea asociada es $Dy = 0$ y su ecuación característica es $m = 0$

$$\Rightarrow y_h = Ce^{0x} = C \times 1 = C$$

e integrando la E.D. original, se tiene

$$y = \underbrace{\int h(x)\, dx}_{y_p} + \underbrace{C}_{y_h} = y_p + y_h$$

Supongamos que se cumple para $n = k$: o sea que la solución particular de $D^k y = h(x)$ es

$$y_p = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{k \text{ veces}} h(x)\, \underbrace{dx\, dx \ldots dx}_{k \text{ veces}}$$

y veamos que se cumple para $n = k + 1$. En efecto, como

$$D^{k+1} y = DD^k y = h(x)$$

hagamos $u = D^k y$ o sea que $Du = h(x)$ y por la hipótesis de inducción, para $n = 1$ se tiene que $u_p = \int h(x)dx$, llamemos $\int h(x)dx = f(x)$, entonces $u_p = D^k y_p = f(x)$ o sea que y_p es la solución particular de la E.D. $D^k y = f(x)$ y por la hipótesis de inducción, para $n = k$, la solución particular de esta E.D. es

$$y_p = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{k \text{ veces}} f(x)\, \underbrace{dx\, dx \ldots dx}_{k \text{ veces}} = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{k \text{ veces}} \left[\int h(x)dx\right] \underbrace{dx\, dx \ldots dx}_{k \text{ veces}} =$$

$$= \underbrace{\int\int\ldots\int}_{k+1 \text{ veces}} h(x)\, \underbrace{dx\, dx \ldots dx}_{k+1 \text{ veces}} \qquad \blacksquare$$

Universidad de Antioquia - Depto. de Matematicas

Teorema 4.10.

Dado $L(D)y = e^{ax}f(x)$ donde $f \in C^n(I)$ y $a \in \mathbb{R}$ (o $a \in \mathbb{C}$), entonces una solución particular de la E.D. es $y_p = e^{ax}\frac{1}{L(D+a)}f(x)$.

Demostración: utilizando (4.11) en la página 124 se tiene

$$\begin{aligned} L(D)y &= e^{ax}f(x) \\ e^{-ax}L(D)y &= f(x) \\ L(D-(-a))(e^{-ax}y) &= f(x) \\ L(D+a)(e^{-ax}y) &= f(x) \end{aligned}$$

Como $Y_p = e^{-ax}y_p$ es una solución particular, entonces satisface la anterior expresión, luego $L(D+a)\underbrace{(e^{-ax}y_p)}_{Y_p} = f(x)$; por la definición de operador inverso

$$Y_p = e^{-ax}y_p = \frac{1}{L(D+a)}f(x)$$

luego

$$y_p = e^{ax}\frac{1}{L(D+a)}f(x) \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 28. Hallar la solución general de $(D-3)^2y = 48xe^{3x}$
<u>Solución</u>: ecuación característica de la homogénea asociada:

$$(m-3)^2 = 0 \Rightarrow m = 3 \quad \text{(con multiplicidad dos)}$$

$$\begin{aligned} y_h &= C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} \\ y_p &= \frac{1}{L(D)}f(x) = \frac{1}{(D-3)^2}(48xe^{3x}) = 48e^{3x}\frac{1}{(D+3-3)^2}x = \\ &= 48e^{3x}\frac{1}{D^2}x = 48e^{3x}\int\int x\,dx\,dx = 48e^{3x}\int\frac{x^2}{2}\,dx = \\ &= 48e^{3x}\frac{x^3}{6} = 8x^3e^{3x} \\ y &= y_h + y_p \\ &= C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + 8x^3e^{3x} \quad \text{Solución general} \end{aligned}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Nota: como

$$L(D) = a_n D^n + \ldots + a_1 D + a_0$$

entonces su polinomio característico es

$$P_n(m) = a_n m^n + \ldots + a_1 m + a_0$$

Por lo anterior podemos afirmar que el espacio de los operadores lineales de coeficientes constantes es isomorfo al espacio de los polinomios de coeficientes reales y constantes.

Teorema 4.11 (Para polinomios).

Si $L(D) = D + a, a \neq 0$ y $h(x)$ un polinomio de grado n, entonces

$$\frac{1}{D+a}\, h(x) = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} - \frac{D^3}{a^3} + \cdots + (-1)^n \frac{D^n}{a^n}\right] h(x).$$

Demostración. Por la Nota anterior, el operador $D + a$ es equivalente al polinomio $m + a$ y por tanto las expresiones racionales $\frac{1}{D+a}$ y $\frac{1}{m+a}$ son equivalentes

Por división sintética se tiene que:

$$\frac{1}{m+a} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{1+\frac{m}{a}}\right] = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{m}{a} + \frac{m^2}{a^2} - \frac{m^3}{a^3} + \cdots + (-1)^n \frac{m^n}{a^n} + \cdots\right]$$

Luego,

$$\frac{1}{D+a} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} - \frac{D^3}{a^3} + \cdots + (-1)^n \frac{D^n}{a^n} + \cdots\right]$$

Como $h(x)$ es un polinomio de grado n, sus anuladores son D^{n+1}, $D^{n+2}, \ldots$, es decir, $D^{n+k} h(x) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots$
Luego,

$$\frac{1}{D+a}\, h(x) = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} - \frac{D^3}{a^3} + \cdots + (-1)^n \frac{D^n}{a^n}\right] h(x) \qquad \blacksquare$$

Universidad de Antioquia. Depto. de Matemáticas

Ejemplo 29. Resolver la siguiente integral $\int x^4 e^{2x}\,dx$

Solución:

$$\int x^4 e^{2x}\,dx = \frac{1}{D}x^4 e^{2x} = e^{2x}\frac{1}{D+2}x^4 = e^{2x}\frac{1}{2}\left[1 - \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} - \frac{D^3}{8} + \frac{D^4}{16}\right]x^4$$
$$= \frac{e^{2x}}{2}\left[x^4 - \frac{4x^3}{2} + \frac{12x^2}{4} - \frac{24x}{8} + \frac{24}{16}\right] + C$$

Teorema 4.12 (Para polinomios).

Si $L(D)$ es un operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes y $h(x)$ es un **polinomio** *de grado r, entonces una solución particular de la E.D. $L(D)y = h(x)$ es de la forma*

$$y_p = \frac{1}{L(D)}h(x) = (b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \ldots + b_r D^r)h(x),$$

donde $b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \ldots + b_r D^r$ es el resultado de dividir

$$\frac{1}{L(D)} = \frac{1}{a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n} = b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \ldots + b_r D^r + \ldots.$$

Ejemplo 30. Hallar la solución general de $y''' - y = xe^x$
Solución:

Ecuación característica: $m^3 - 1 = (m-1)(m^2+m+1) = 0$
y sus raíces son $m = 1, \quad m = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
Luego la solución homogénea y particular son

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{-\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$$
$$y_p = \frac{1}{D^3-1}xe^x = e^x\frac{1}{(D+1)^3-1}x$$
$$= e^x\frac{1}{D^3+3D^2+3D+1-1}x = e^x\frac{1}{D(D^2+3D+3)}x$$
$$= e^x\frac{1}{(D^2+3D+3)}\int x\,dx = \frac{e^x}{2}\frac{1}{D^2+3D+3}x^2$$
$$= \frac{e^x}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{D}{3} + \frac{2}{9}D^2\right]x^2 = \frac{e^x}{6}\left[x^2 - 2x + \frac{2}{3}2\right]$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

$$= \frac{e^x}{6}\left[x^2 - 2x + \frac{4}{3}\right]$$

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,x + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\,x + \frac{e^x}{6}\left[x^2 - 2x + \frac{4}{3}\right] \end{aligned}$$

Nota: el operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes se puede escribir así:

$$L(D) = L_1(D^2) + DL_2(D^2).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} L(D) &= a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_n D^n = \\ &= (a_0 + a_2 D^2 + a_4 D^4 + \ldots) + D(a_1 + a_3 D^2 + a_5 D^4 + \ldots) \end{aligned}$$

y denotando por $L_1(D^2) = a_0 + a_2 D^2 + a_4 D^4 + \ldots$ y
$L_2(D^2) = a_1 + a_3 D^2 + a_5 D^4 + \ldots$, se obtiene

$$L(D) = L_1(D^2) + DL_2(D^2)$$

Los teoremas siguientes también son válidos para la función coseno.

Teorema 4.13.

Si a, $L(-a^2)$ y $\frac{1}{L(-a^2)}$ son reales, entonces:

a. $L(D^2)\operatorname{sen} ax = L(-a^2)\operatorname{sen} ax$

b. $\frac{1}{L(D^2)}\operatorname{sen} ax = \frac{1}{L(-a^2)}\operatorname{sen} ax$, *si* $L(-a^2) \neq 0$

Demostración. a. Primero veamos por inducción sobre n que $D^{2n}(\operatorname{sen} ax) = (-a^2)^n \operatorname{sen} ax$. En efecto:
Para $n = 1$, veamos que $D^2(\operatorname{sen} ax) = (-a^2)\operatorname{sen} ax$.
Como $D(\operatorname{sen} ax) = a\cos ax$ y volviendo a derivar $D^2(\operatorname{sen} ax) = -a^2 \operatorname{sen} ax$ o sea que para $n = 1$ se cumple que $D^2(\operatorname{sen} ax) = -a^2 \operatorname{sen} ax$.
Ahora supongamos que se cumple para $n = k$: $D^{2k}(\operatorname{sen} ax) = (-a^2)^k \operatorname{sen} ax$ y demostrmos que se cumple para $n = k + 1$.

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

Aplicando las hipótesis de inducción para $n = 1$ y $n = k$, se tiene que $D^{2(k+1)}(\operatorname{sen} ax) = D^{2k+2}(\operatorname{sen} ax) = D^{2k}D^2(\operatorname{sen} ax) = D^{2k}(-a^2)(\operatorname{sen} ax) = (-a^2)D^{2k}(\operatorname{sen} ax) = (-a^2)(-a^2)^k(\operatorname{sen} ax) = (-a^2)^{k+1}(\operatorname{sen} ax)$.

Pasemos a demostrar el resultado de a.:

$$\begin{aligned}
L(D^2)\operatorname{sen} ax &= \underbrace{(a_0 + a_2D^2 + a_4D^4 + \ldots + a_{2n}D^{2n})}_{L(D^2)} \operatorname{sen} ax \\
&= a_0 \operatorname{sen} ax + a_2D^2 \operatorname{sen} ax + a_4D^4 \operatorname{sen} ax + \ldots + a_{2n}D^{2n} \operatorname{sen} ax \\
&= a_0 \operatorname{sen} ax + a_2(-a^2) \operatorname{sen} ax + a_4(-a^2)^2 \operatorname{sen} ax \\
&+ \ldots + a_{2n}(-a^2)^n \operatorname{sen} ax \\
&= [a_0 + a_2(-a^2) + a_4(-a^2)^2 + \ldots + a_{2n}(-a^2)^n] \operatorname{sen} ax \\
&= L(-a^2) \operatorname{sen} ax
\end{aligned}$$

b. Por el resultado en **a.**, $L(D^2)\operatorname{sen} ax = L(-a^2)\operatorname{sen} ax$, aplicamos $L^{-1}(D^2)$ a ambos lados:

$$L^{-1}(D^2)L(D^2)\operatorname{sen} ax = L(-D^2)\, L(-a^2)\operatorname{sen} ax = L(-a^2)L^{-1}(D^2)\operatorname{sen} ax$$

y dividiendo por $L(-a^2)$ se tiene

$$\frac{1}{L(D^2)} \operatorname{sen} ax = \frac{1}{L(-a^2)} \operatorname{sen} ax \quad \text{con} \quad L(-a^2) \neq 0. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 31. Hallar la solución particular de $(D^4 - 5D^2 + 4)y = \operatorname{sen} 3x$.
<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^4 - 5D^2 + 4} \operatorname{sen} 3x = \frac{1}{(D^2)^2 - 5D^2 + 4} \operatorname{sen} 3x \\
&= \frac{1}{(-3^2)^2 - 5(-3^2) + 4} \operatorname{sen} 3x = \frac{1}{81 + 45 + 4} \operatorname{sen} 3x \\
&= \frac{1}{130} \operatorname{sen} 3x
\end{aligned}$$

Universidad de Antioquia. Depto. de Matemáticas

Teorema 4.14.

Si a, $L_1(-a^2)$ y $L_2(-a^2)$ son reales, entonces:

1. $L(D)\,\text{sen}\,ax = L_1(-a^2)\,\text{sen}\,ax + DL_2(-a^2)\,\text{sen}\,ax$

2. $$\begin{aligned}\frac{1}{L(D)}\,\text{sen}\,ax &= \frac{1}{L_1(D^2)+DL_2(D^2)}\,\text{sen}\,ax\\ &= \frac{1}{L_1(-a^2)+DL_2(-a^2)}\,\text{sen}\,ax\end{aligned}$$

Demostración. Por la nota anterior y por la parte uno del teorema 4.13., tenemos que:
$L(D) = L_1(D^2)\,\text{sen}\,ax + DL_2(D^2)\,\text{sen}\,ax = L_1(-a^2)\,\text{sen}\,ax + DL_2(-a^2)\,\text{sen}\,ax = L_1(-a^2)\,\text{sen}\,ax + L_2(-a^2)a\cos ax$ ■

Ejemplo 32. Hallar la solución particular para $(D^2+2D+2)y = e^x\cos 2x$
Solución:

$$\begin{aligned}y_p &= \frac{1}{D^2+2D+2}\,e^x\cos 2x = e^x\frac{1}{(D+1)^2+2(D+1)+2}\,\cos 2x\\ &= e^x\frac{1}{D^2+2D+1+2D+2+2}\,\cos 2x = e^x\frac{1}{D^2+4D+5}\,\cos 2x\\ &= e^x\frac{1}{(-2^2)+4D+5}\,\cos 2x = e^x\frac{1}{4D+1}\,\cos 2x\\ &= e^x\frac{4D-1}{(4D-1)(4D+1)}\,\cos 2x = e^x\frac{4D-1}{16D^2-1}\,\cos 2x\\ &= e^x\frac{4D-1}{16(-2^2)-1}\,\cos 2x = e^x\frac{4D-1}{-64-1}\,\cos 2x\\ &= \frac{e^x}{-65}(4D-1)\,\cos 2x = -\frac{e^x}{65}\,(-8\,\text{sen}\,2x-\cos 2x)\\ &= \frac{e^x}{65}\,(8\,\text{sen}\,2x+\cos 2x)\end{aligned}$$

Teorema 4.15.

Sean $L(D)y = h_1(x)+ih_2(x)$ y $y_p = y_{p_1}+iy_{p_2}$ es una solución particular de la E.D. anterior, entonces y_{p_1} es la solución particular de la E.D. $L(D)y = h_1(x)$ y y_{p_2} es una solución particular de la E.D. $L(D)y = h_2(x)$.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Demostración. En efecto, como $y_p = y_{p_1} + iy_{p_2}$ es una solución particular, entonces satisface la E.D.: $L(D)y = h_1(x) + ih_2(x)$
es decir,

$$\begin{aligned} L(D)y_p &= h_1(x) + ih_2(x) \\ L(D)(y_{p_1} + iy_{p_2}) &= h_1(x) + ih_2(x) \\ L(D)y_{p_1} + iL(D)y_{p_2} &= h_1(x) + ih_2(x) \end{aligned}$$

igualando la parte real tenemos

$$L(D)y_{p_1} = h_1(x)$$

es decir, y_{p_1} es solución particular de $L(D)y = h_1(x)$

e igualando la parte imaginaria tenemos

$$L(D)y_{p_2} = h_2(x)$$

es decir, y_{p_2} es solución particular de $L(D)y = h_2(x)$ ■

Ejemplo 33. Aplicando el teorema 4.15, hallar una solución particular de la E.D. $(D^2 + a^2)y = e^{iax} = \cos ax + i \operatorname{sen} ax$

<u>Solución</u>: obsérvese que como $L(D) = D^2 + a^2 \Rightarrow L(-a^2) = -a^2 + a^2 = 0$, entonces no podemos usar el Teorema 4.13 parte 2. y más bien utilizamos el Teorema 4.15

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 + a^2}(\cos ax + i \operatorname{sen} ax) = \frac{1}{D^2 + a^2}\, e^{iax} \\ &= e^{iax} \frac{1}{(D + ia)^2 + a^2}\,(1) = e^{iax} \frac{1}{D^2 + 2iaD + a^2 - a^2}\,(1) \\ &= e^{iax} \frac{1}{(D + 2ia)D}\,(1) = e^{iax} \frac{1}{2ia + D}\, x = e^{iax} \frac{1}{2ia}\left[1 - \frac{D}{2ia}\right] x \end{aligned}$$

$$= e^{iax} \frac{1}{2ia}\left[x - \frac{1}{2ia}\right] = \frac{e^{iax}}{2a}\left[-ix + \frac{1}{2a}\right] = \frac{1}{2a}(\cos ax + i \operatorname{sen} ax)\left(\frac{1}{2a} - ix\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2a}\cos ax}^{\text{se descarta}} + x \operatorname{sen} ax}_{y_{p_1}} + i\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2a}\operatorname{sen} ax}^{\text{se descarta}} - x\cos ax}_{y_{p_2}}\right)\right]$$

Universidad de Antioquia Depto. de Matematicas

Los dos términos señalados en la expresión anterior no se tienen en cuenta porque

$$y_h = C_1 \cos ax + C_2 \operatorname{sen} ax$$

y y_h absorbe los términos descartados , por lo tanto:

$$y_p = \frac{1}{2a} x \operatorname{sen} ax - i \frac{1}{2a} x \cos ax$$

Del Teorema 4.15 concluimos que

$$y_{p_1} = \frac{1}{2a} x \operatorname{sen} ax$$

es solución particular de la E.D.

$$(D^2 + a^2) y = \cos ax$$

y

$$y_{p_2} = -\frac{1}{2a} x \cos ax$$

es solución particular de la E.D.

$$(D^2 + a^2) y = \operatorname{sen} ax$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejemplo 34. Hallar la solución particular de $(D^2 + a^2)y = \cos ax$
<u>Solución</u>: como $\cos ax =$ parte real de $e^{iax} = \mathbf{R_e} e^{iax}$, entonces

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 + a^2} \mathbf{R}_e(e^{iax}) = \mathbf{R}_e \left(\frac{1}{D^2 + a^2} e^{iax} \right) \\ &= \mathbf{R}_e \left(e^{iax} \frac{1}{(D + ia)^2 + a^2} (1) \right) = \mathbf{R}_e \left(e^{iax} \frac{1}{(D + 2ia) D} (1) \right) \\ &= \mathbf{R}_e \left(\frac{1}{2a} x \operatorname{sen} ax - i \frac{1}{2a} x \cos ax \right) = \frac{1}{2a} x \operatorname{sen} ax \end{aligned}$$

Ejemplo 35. Hallar la solución particular de $(D^2 + a^2)y = \operatorname{sen} ax =$ parte imaginaria de $(e^{iax}) = \mathbf{I}_m(e^{iax})$
<u>Solución</u>: como $\operatorname{sen} ax =$ parte imaginaria de $e^{iax} = \mathbf{I_m} e^{iax}$, entonces

$$y_p = \frac{1}{D^2 + a^2} \mathbf{I}_m(e^{iax}) = \mathbf{I}_m \left(\frac{1}{D^2 + a^2} e^{iax} \right)$$

$$= \mathbf{I}_m\left(\frac{1}{2a}x\operatorname{sen}ax - i\frac{1}{2a}x\cos ax\right) = -\frac{1}{2a}x\cos ax$$

Nota: el anterior método también se aplica para las E.D. de la forma $L(D)y = q(x)\operatorname{sen}ax$ o $L(D)y = q(x)\cos ax$, donde $q(x)$ es un polinomio o exponencial o producto de polinomio por exponencial.

Ejemplo 36. Hallar la solución particular de $(D^2-2D+2)y = 4e^x x\operatorname{sen}x$
Solución:

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2-2D+2}\,4e^x x\operatorname{sen}x = 4e^x\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+2}\,x\operatorname{sen}x\\
&= 4e^x\frac{1}{D^2+2D+1-2D-2+2}\,x\operatorname{sen}x = 4e^x\frac{1}{D^2+1}\,x\operatorname{sen}x\\
&= 4e^x\frac{1}{D^2+1}\,x\mathbf{I}_m(e^{ix}) = 4e^x\mathbf{I}_m\left(\frac{1}{D^2+1}\,xe^{ix}\right)\\
&= 4e^x\mathbf{I}_m\left(e^{ix}\frac{1}{(D+i)^2+1}\,x\right) = 4e^x\mathbf{I}_m\left(e^{ix}\frac{1}{D^2+2iD-1+1}\,x\right)\\
&= 4e^x\mathbf{I}_m\left(e^{ix}\frac{1}{(D+2i)D}\,x\right) = 4e^x\mathbf{I}_m\left(e^{ix}\frac{1}{D+2i}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)\\
&= \frac{4}{2}\,e^x\mathbf{I}_m\left(e^{ix}\frac{1}{2i}\left[1-\frac{D}{2i}+\frac{D^2}{(2i)^2}\right]x^2\right)\\
&= \frac{2}{2}\,e^x\mathbf{I}_m\left[e^{ix}(-i)\left(x^2-\frac{2x}{2i}+\frac{2}{-4}\right)\right]\\
&= e^x\mathbf{I}_m(\cos x + i\operatorname{sen}x)\left(-ix^2+x+\frac{i}{2}\right)\\
&= e^x\left(-x^2\cos x + x\operatorname{sen}x + \frac{\cos x}{2}\right)
\end{aligned}$$

La homogénea asociada:

$$(D^2-2D+2)y = 0$$

tiene por cuación característica

$$m^2-2m+2=0 \Rightarrow m = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \frac{2\pm 2i}{2} = 1\pm i$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

$$\Rightarrow y_h = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \operatorname{sen} x$$

y como $\frac{e^x \cos x}{2}$ aparece en y_h, entonces descartamos esta expresión de y_p, por lo tanto la y_p queda de la siguiente forma:

$$y_p = e^x \left(-x^2 \cos x + x \operatorname{sen} x\right)$$

Ejemplo 37. Utilizando el método de los operadores inversos resolver la siguiente integral: $\int x^2 \cos x \, dx$
<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos x \, dx &= \frac{1}{D} x^2 \cos x = \frac{1}{D} x^2 \mathbf{R}_e e^{ix} = \mathbf{R}_e \frac{1}{D} x^2 e^{ix} \\
&= \mathbf{R}_e e^{ix} \frac{1}{D+i} x^2 = \mathbf{R}_e e^{ix} \frac{1}{i} \left[1 - \frac{D}{i} + \frac{D^2}{i^2}\right] x^2 \\
&= \mathbf{R}_e e^{ix} (-i) \left[x^2 - \frac{2x}{i} + \frac{2}{-1}\right] = \mathbf{R}_e e^{ix} (-ix^2 + 2x + 2i) \\
&= \mathbf{R}_e (\cos x + i \operatorname{sen} x)(-ix^2 + 2x + 2i) \\
&= (2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + x^2 \operatorname{sen} x) + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 38. Usando el método de los operadores inversos, calcular la siguiente integral: $\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx$
<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned}
\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx &= \frac{1}{D} e^{3x} \operatorname{sen} 2x = e^{3x} \frac{1}{D+3} \operatorname{sen} 2x \\
&= e^{3x} \frac{D-3}{D^2-9} \operatorname{sen} 2x = e^{3x} \frac{D-3}{-2^2-9} \operatorname{sen} 2x \\
&= -\frac{e^{3x}}{13} (D-3) \operatorname{sen} 2x = -\frac{e^{3x}}{13} (2 \cos 2x - 3 \operatorname{sen} 2x) + C
\end{aligned}$$

Para los siguientes ejercicios hallar la solución particular, utilizándo el método de los operadores inversos:

Ejercicio 1. $(D^2 + 16)y = x \cos 4x$
(**Rta.:** $y_p = \frac{1}{64} x \cos 4x + \frac{x^2}{16} \operatorname{sen} 4x$)

Ejercicio 2. $(D^2 + 4)y = xe^x \operatorname{sen} x$
(**Rta.:** $y_p = e^x \left[(\frac{1}{50} - \frac{x}{10}) \cos x + (\frac{-7}{50} + \frac{x}{5}) \operatorname{sen} x\right]$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejercicio 3. $(D^2+4)y = 64x \operatorname{sen} 2x + 32\cos 2x$
(**Rta.:** $y_p = 12x \operatorname{sen} 2x - 8x^2 \cos 2x$)

Ejercicio 4. $y''' - 5y'' + 6y' = 2\operatorname{sen} x + 8$
(**Rta.:** $y_p = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} x + \frac{4}{3}x$)

Ejercicio 5. $(D^2+9)y = 36\operatorname{sen} 3x$
(**Rta.:** $y_p = -6x\cos 3x$)

Ejercicio 6. $(D^3+1)y = \cos 2x + 2\operatorname{sen} 3x$
(**Rta.:** $y_p = \frac{1}{65}(\cos 2x - 8\operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{365}(27\cos 3x + \operatorname{sen} 3x)$)

Ejercicio 7. $(D^2+2D+2)y = e^x \operatorname{sen} x$
(**Rta.:** $y_p = -\frac{e^x}{8}(\cos x - \operatorname{sen} x)$)

Ejercicio 8. Calcular, utilizando el método de los operadores inversos, $\int x^3 e^{2x}\ dx$.
(**Rta.:** $\frac{e^{2x}}{2}(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}) + C$)

Ejercicio 9. Calcular, $\int e^{-pt} t^n\ dt$, utilizando operadores inversos.
(**Rta.:** $-\frac{e^{-pt}}{p}\left[t^n + \frac{nt^{n-1}}{p} + \frac{n(n-1)t^{n-2}}{p^2} + \ldots + \frac{n!}{p^n}\right] + C$)

Ejercicio 10. Calcular, $\int xe^x \cos 2x\ dx$, utilizando operadores inversos.
(**Rta.:** $\frac{e^x}{5}\left[x\cos 2x + \frac{3}{5}\cos 2x + 2x\operatorname{sen} 2x - \frac{4}{5}\operatorname{sen} x\right] + C$)

Ejercicio 11. Dada la E.D. $y'' + by' + cy = e^{ax}$, donde a no es raíz de la ecuación característica: Mostrar que una solución particular es de la forma $y_p = Ae^{ax}$, donde $A = \frac{1}{a^2+ab+c}$.

Ejercicio 11. Dada la E.D. $y'' + by' + cy = e^{ax}$, donde a es raíz de multiplicidad dos de la ecuación característica: Mostrar que una solución particular es de la forma $y_p = Ax^2e^{ax}$, donde $A = \frac{1}{2}$.

4.10. E.D.O. DE EULER - CAUCHY

Definición 4.7. *La E.D.O. lineal*

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x\frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes, $a_n \neq 0$ y $f(x)$ es continua, se le llama **E.D.O. de Euler-Cauchy**.

Universidad de Antioquia Depto. de Matematicas

Con la sustitución $z = \ln x$ o $x = e^z$, convertimos la E.D. de Euler-Cauchy (que es de coeficientes variables) en una E.D. con coeficientes constantes. Veamos por el método de inducción que

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = D_z(D_z - 1)(D_z - 2)\dots(D_z - (n-1))y$$

En efecto, para $n = 1$, como

$$\begin{aligned} z = \ln x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{x} \\ &\Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = D_z y \end{aligned} \tag{4.12}$$

Supongamos que se cumple para $n = k$:

$$x^k \frac{d^k y}{dx^k} = D_z(D_z - 1)(D_z - 2)\dots(D_z - (k-1))y \qquad (*)$$

y veamos que para $n = k + 1$ se cumple que:

$$x^{k+1} \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = D_z(D_z - 1)(D_z - 2)\dots(D_z - k)y$$

derivando $(*)$ con respecto a x , utilizando la regla de la cadena y las hipótesis de inducción para $n = k$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^k \frac{d^k y}{dx^k}\right) &= \frac{d}{dx}\left(D_z(D_z - 1)(D_z - 2)\dots(D_z - (k-1))y\right) \\ x^k \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} + kx^{k-1}\frac{d^k y}{dx^k} &= \frac{d}{dz}\left(D_z(D_z - 1)(D_z - 2)\dots(D_z - (k-1))y\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) \\ &= \left(D_z^2(D_z - 1)(D_z - 2)\dots(D_z - (k-1)\right) y \left(\frac{1}{x}\right) \\ x^{k+1} \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} + kx^k \frac{d^k y}{dx^k} &= D_z^2(D_z - 1)(D_z - 2)\dots(D_z - (k-1))y \\ x^{k+1} \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} &= D_z^2(D_z - 1)(D_z - 2)\dots(D_z - (k-1))y - kx^k \frac{d^k y}{dx^k} \\ &= D_z^2(D_z - 1)(D_z - 2)\dots(D_z - (k-1))y \\ &- kD_z(D_z - 1)(D_z - 2)\dots(D_z - (k-1))y \\ &= D_z(D_z - 1)(D_z - 2)\dots(D_z - (k-1))(D_z - k)y \end{aligned}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

hemos demostrado que para todo $n = 1, 2, \ldots$ se cumple que

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = D_z(D_z - 1)(D_z - 2)\ldots(D_z - (n-1))y \tag{4.13}$$

donde $z = \ln x$

Ejemplo 39. Resolver la siguiente ecuación de Euler-Cauchy

$$x^2 y'' + xy' + y = \sec(\ln x)$$

<u>Solución</u>:

$$z = \ln x \Rightarrow D_z(D_z - 1)y + D_z y + y = \sec z$$

$$D_z^2 y - D_z y + D_z y + y = \sec z$$

$$D_z^2 y + y = \sec z \Rightarrow (D_z^2 + 1)y = \sec z$$

Ecuación característica:

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i$$

1. $y_h = C_1 \cos z + C_2 \operatorname{sen} z$
   Para hallar y_p solo podemos aplicar el método de variación de parámetros, ya que los otros dos métodos no sirven para trabajar con las función secante.
   La solución particular, por el método de varicación de parámetros, es de la forma
   $$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$
   con $y_1 = \cos z$ y $y_2 = \operatorname{sen} z$

2. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos z & \operatorname{sen} z \\ -\operatorname{sen} z & \cos z \end{vmatrix} = \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$

3. $u_1' = -\frac{f(z)y_2}{W(y_1,y_2)} = -\frac{\sec z \operatorname{sen} z}{1} = -\tan z$
   $u_2' = \frac{f(z)y_1}{W(y_1,y_2)} = \frac{\sec z \cos z}{1} = 1$

4. $u_1 = \int u_1'\, dz = \ln|\cos z|, \qquad u_2 = \int u_2'\, dz = z$

5. $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = (\ln|\cos z|)\cos z + z \operatorname{sen} z$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

6. $y = y_h + y_p = C_1 \cos z + c_2 \operatorname{sen} z + \cos z \ln|\cos z| + z \operatorname{sen} z$

$$y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x) \ln|\cos(\ln x)| + \ln x \operatorname{sen}(\ln x)$$

Resolver las siguientes E.D. de Euler-Cauchy.

Ejercicio 1. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2y = x \ln x$
(**Rta.:** $y = C_1 x \cos(\ln x) + C_2 x \operatorname{sen}(\ln x) + x \ln x$)

Ejercicio 2. $(x-1)^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2(x-1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4(x-1)\frac{dy}{dx} + 4y = 4\ln(x-1)$
(**Rta.:** $y = C_1(x-1) + C_2(x-1)^{-2} + C_3(x-1)^2 + \ln(x-1) + 1$)

Ejercicio 3. $x^2y'' - xy' + y = x \ln^3 x$
(**Rta.:** $y = C_1 x + C_2 x \ln x + \frac{1}{20} x \ln^5 x$)

Ejercicio 4. $x^3D^3y + 3x^2D^2y + 4xDy = \operatorname{sen}(\sqrt{3}\ln x)$
(**Rta.:**$y = C_1 + C_2 \cos(\sqrt{3}\ln x) + C_3 \operatorname{sen}(\sqrt{3}\ln x) - \frac{\ln x \operatorname{sen}(\sqrt{3}\ln x)}{6}$)

Ejercicio 5. $x^3D^3y + 3x^2D^2y + xDy = x^3$
(**Rta.:** $y = C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 \ln^2|x| + \frac{1}{27}x^3$)

Ejercicio 6. $x^2D^2y - 4xDy + 6y = \ln x^2$
(**Rta.:** $y = C_1x^3 + C_2x^2 + \frac{1}{3}\ln x + \frac{5}{18}$)

Ejercicio 7. $x^2D^2y + xDy + 9y = \cos(\ln x^3)$
(**Rta.:** $y = C_1 \cos(\ln x^3) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x^3) + \frac{1}{6}\ln x \operatorname{sen}(\ln x^3)$)

Ejercicio 8. $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{x}{1+x}$
(**Rta.:** $y = C_1x^2 + C_2x + x^2 \ln|1+x| + x\ln|1+x|$)

Ejercicio 9. Hallar una base para el núcleo del operador diferencial definido por:

$$L(D) = x^2D^2 - xD + 5 : \ C^2(I) \longrightarrow C(I)$$

(**Rta.:** $\langle x\cos(\ln x^2), x \operatorname{sen}(\ln x^2\rangle$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

4.11. APLICACIONES DE LA E.D. DE SEGUNDO ORDEN

4.11.1. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Supongamos que tenemos un resorte dispuesto en forma vertical, con el extremo superior fijado a una superficie horizontal y el otro extremo libre al cual se le fija una carga de masa m, la fuerza de recuperación del resorte esta dada por la Ley de Hooke:

$$F = ks$$

donde
s: elongación del resorte.
k: constante elástica del resorte.

Deduzcamos la E.D. que rige el movimiento de la masa sujeta al resorte (ver figura 4.2)

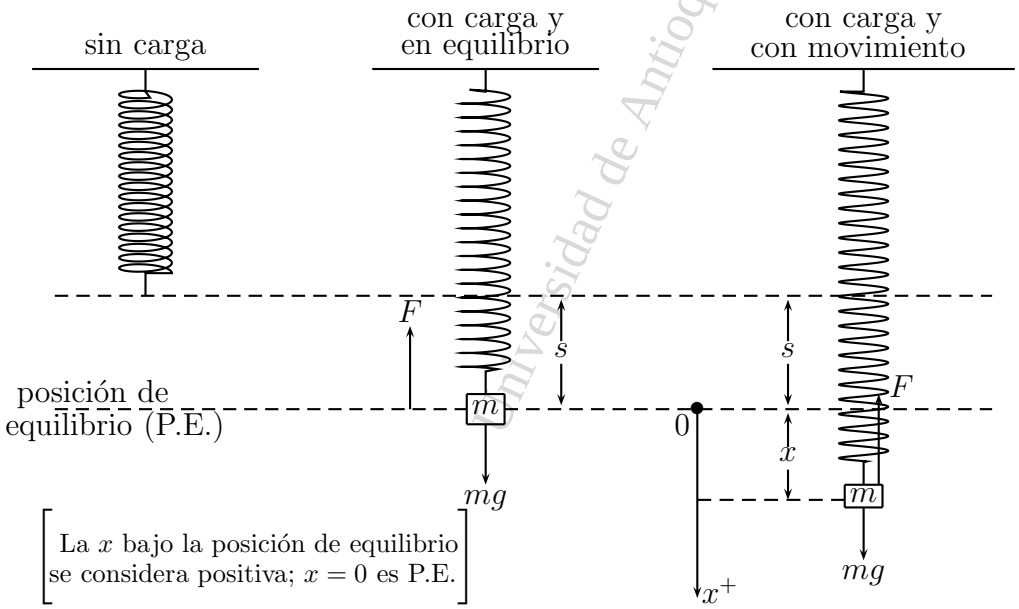


Figura 4.2

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Por la segunda ley de Newton tenemos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -F + mg = -k(x+s) + mg$$

$$\Rightarrow -F + mg = -kx \underbrace{-ks + mg}_{= 0 \text{: en reposo}}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

llamemos

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \Rightarrow \qquad \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}_{\text{E.D. segundo orden con coeficientes ctes.}}$$

Ecuación característica

$$m^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow m = \sqrt{-\omega^2} = \pm\omega i$$

Sol. general

$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \operatorname{sen}\omega t$$

Condiciones iniciales:

$$x(0) = \alpha$$

Si $\alpha > 0$: el cuerpo está por debajo de la P.E. (Posición de Equilibrio).

Si $\alpha < 0$: el cuerpo está por encima de la P.E.

Si $\alpha = 0$: el cuerpo está en la P.E.

$$x'(0) = \beta$$

Si $\beta > 0$ el cuerpo inicia su movimiento con velocidad hacia abajo.

Si $\beta < 0$ el cuerpo inicia su movimiento con velocidad hacia arriba.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Si $\beta = 0$ el cuerpo inicia su movimiento desde el reposo.

Llamemos

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A$$

y si hacemos

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{C_1}{A}, \quad \cos\phi = \frac{C_2}{A}$$

o sea que

$$\tan\phi = \frac{C_1}{C_2}$$

La constante A se le llama la amplitud del Movimiento Armónico Simple (M.A.S.). y el ángulo ϕ se le llama ángulo de Fase.

Como

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A(C_1\cos\omega t + C_2\operatorname{sen}\omega t)}{A} = A\left(\frac{C_1}{A}\cos\omega t + \frac{C_2}{A}\operatorname{sen}\omega t\right) \\ &= A(\operatorname{sen}\phi\cos\omega t + \cos\phi\operatorname{sen}\omega t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Periodo de Vibraciones Libres **T** se define así: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Frecuencia **f** de vibraciones libres se define vomo el inverso del periodo, es decir: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

4.11.2. MOVIMIENTO AMORTIGUADO

Cuando el cuerpo sujeto al resorte se mueve en un medio que produce fricción sobre el cuerpo, entonces decimos que el movimiento se efectúa con amortiguamiento (ver figura 4.3), supongamos que el amortiguamiento es directamente proporcional a la velocidad. Por la segunda ley de Newton tenemos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x+s) + mg - \beta\frac{dx}{dt}$$

donde β constante de fricción o constante de amortiguamiento.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Dividiendo por m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

Universidad de Antioquia. Depto. de Matematicas

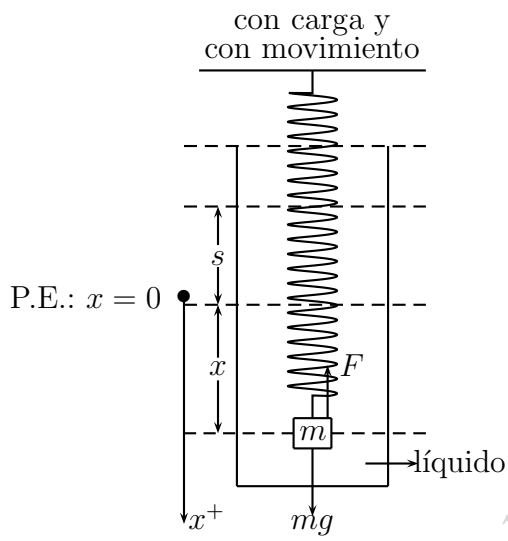


Figura 4.3

Donde, $2\lambda = \frac{\beta}{m} > 0$ y $\omega^2 = \frac{k}{m}$

Ecuación característica:

$$p^2 + 2\lambda p + \omega^2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\omega^2}}{2} = \frac{-2\lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

- Cuando $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, entonces a este movimiento se le llama **sobreamortiguado** (Ver figura 4.4), en este caso p_1 y p_2 son negativos. Y como

  $$x(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} = C_1 e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})t}$$

  por lo tanto

  $$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

- Cuando $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, a este movimiento se le llama **críticamente amortiguado** (Ver figura 4.5).

  $$x(t) = C_1 e^{-\lambda t} + C_2 t e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t),$$

  por lo tanto $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

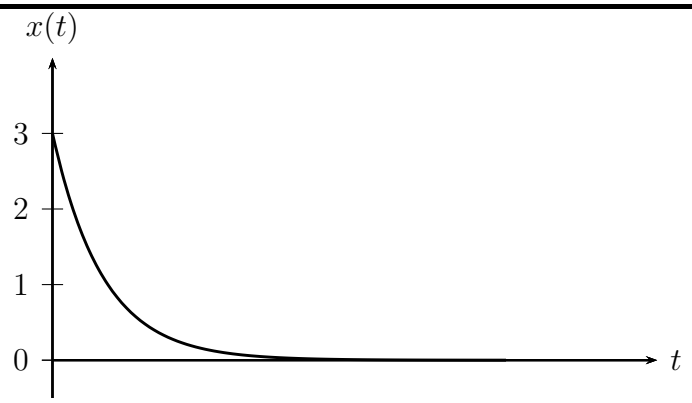


Figura 4.4 Sobreamortiguado

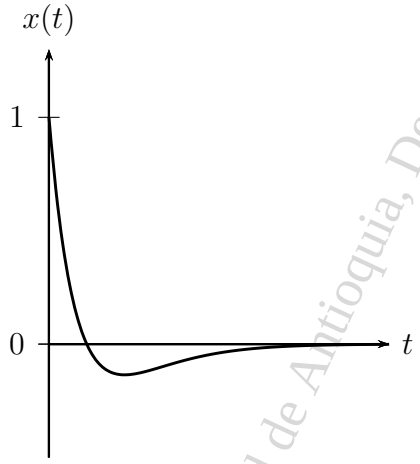


Figura 4.5 Críticamente amortiguado

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

- Cuando $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ o lo que es lo mismo $\omega^2 - \lambda^2 > 0$, a este movimiento se le llama **subamortiguado** (Ver figura 4.6).
  $x(t) = C_1 e^{-\lambda t} \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + C_2 e^{-\lambda t} \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t$

  Llamemos $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A$ y $\frac{C_1}{A} = \operatorname{sen}\phi$ y $\frac{C_2}{A} = \cos\phi$, entonces

$$x(t) = A\frac{C_1 e^{-\lambda t} \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + C_2 e^{-\lambda t} \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t}{A}$$

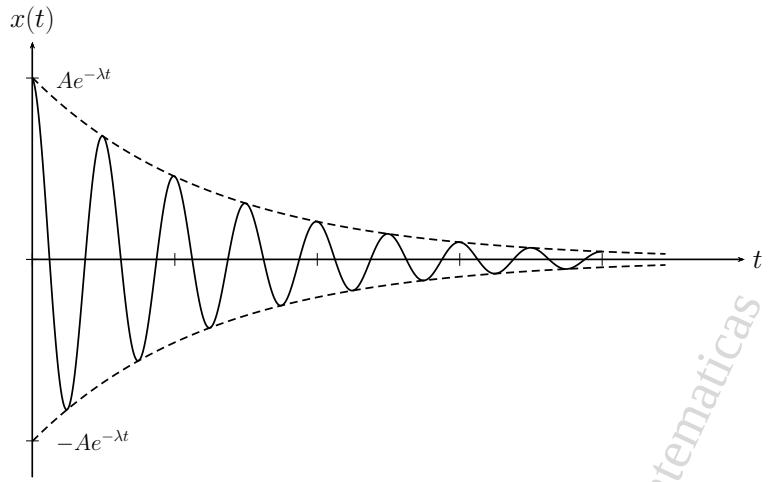


Figura 4.6 Subamortiguado

$$
\begin{aligned}
&= Ae^{-\lambda t}\left(\frac{C_1}{A}\cos\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t + \frac{C_2}{A}\operatorname{sen}\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t\right)\\
&= Ae^{-\lambda t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t+\phi\right)
\end{aligned}
$$

Donde ϕ se le llama el ángulo de fase.

Nota: respecto al movimiento sobreamortiguado y críticamente amortiguado debemos anotar que no son movimientos oscilatorios y cruzan a lo sumo una vez la posición de equilibrio como se ve en las gráficas 4.4 y 4.5

4.11.3. MOVIMIENTO FORZADO.

Ahora supongamos que el cuerpo sujeto al resorte esta en un medio que produce fricción y también hay una fuerza exterior $F(t)$ que actúa sobre el cuerpo (ver figura 4.7). Por la segunda ley de Newton:

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k(x+s)+mg-\beta\frac{dx}{dt}+F(t)\\
m\frac{d^2x}{dt^2} &= -kx-ks+mg-\beta\frac{dx}{dt}+F(t)\\
&\underbrace{m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=F(t)}_{\text{E.D. segundo orden de coef. ctes, no homogénea}}
\end{aligned}
$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

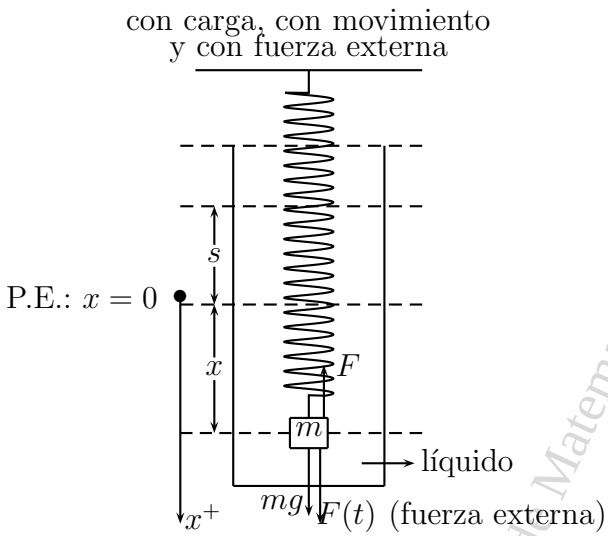


Figura 4.7

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejemplo 40. (Sin Amortiguación) Este problema se le llama de Amplitud Modulada (A.M.).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t,$$

donde $F_0 =$ constante, $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$.
<u>Solución</u>: la ecuación característica:

$$m^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \omega i$$

Por lo tanto la solución homogénea y particular son

$$\begin{aligned} x_h(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t \\ x_p(t) &= \frac{1}{D^2 + \omega^2} F_0 \cos \gamma t = F_0 \frac{1}{-\gamma^2 + \omega^2} \cos \gamma t \\ &= \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t \end{aligned}$$

Solución general:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t$$

Si elegimos como condiciones iniciales:

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0$$

entonces

$$C_1 = -\frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2},\ \ C_2 = 0$$

luego

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}(-\cos\omega t + \cos\gamma t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}(\cos\gamma t - \cos\omega t) \\ &= \frac{2F_0}{\omega^2 - \gamma^2}\,\text{sen}\left(\frac{\omega - \gamma}{2}\right)t\ \text{sen}\left(\frac{\omega + \gamma}{2}\right)t \end{aligned}$$

Periodo de sen $\left(\frac{\omega-\gamma}{2}\right)$ se calcula así:

$$\left(\frac{\omega - \gamma}{2}\right)T_1 = 2\pi \Rightarrow T_1 = \frac{4\pi}{\omega - \gamma}$$

Periodo de sen $\left(\frac{\omega+\gamma}{2}\right)$ se calcula así:

$$\left(\frac{\omega + \gamma}{2}\right)T_2 = 2\pi \Rightarrow T_2 = \frac{4\pi}{\omega + \gamma}$$

$$\Rightarrow T_1 > T_2 \ \ \text{(Ver figura 4.8)}$$

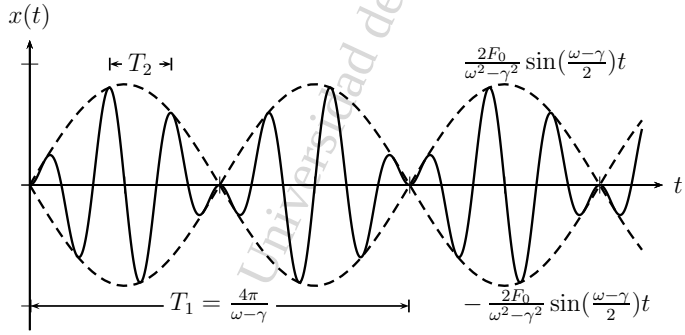


Figura 4.8 Pulsos

Ejemplo 41. (Sin Amortiguamiento) Este problema se le llama de resonancia, ya que la velocidad angular (o frecuencia angular) de la fuerza exterior

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

esta en resonancia con la velocidad angular (o frecuencia angular) del cuerpo, es decir, $\omega = \gamma$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \omega t,$$

donde $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$

<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned}
x_h(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t \\
x_p(t) &= \frac{1}{D^2+\omega^2} F_0 \operatorname{sen} \omega t \ = \frac{1}{D^2+\omega^2} F_0(\mathbf{I}_m e^{i\omega t}) \\
&= F_0(\mathbf{I}_m \left(\frac{1}{D^2+\omega^2} e^{i\omega t} \right)) = F_0(\mathbf{I}_m \left(e^{i\omega t} \frac{1}{(D+\omega i)^2+\omega^2} 1 \right)) \\
&= F_0(\mathbf{I}_m \left(e^{i\omega t} \frac{1}{D^2+2i\omega D-\omega^2+\omega^2} 1 \right)) \\
&= F_0(\mathbf{I}_m \left(e^{i\omega t} \frac{1}{(D+2i\omega)D} 1 \right)) \\
&= F_0(\mathbf{I}_m \left(e^{i\omega t} \frac{1}{D+2i\omega} t \right)) = F_0(\mathbf{I}_m \left(e^{i\omega t} \frac{1}{2i\omega} \left[1 - \frac{D}{2i\omega} \right] t \right)) \\
&= F_0(\mathbf{I}_m (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) \frac{1}{2i\omega} \left(t - \frac{1}{2i\omega} \right)) \\
&= \frac{F_0}{2\omega}(-t \cos \omega t + \frac{1}{2\omega} \operatorname{sen} \omega t)
\end{aligned}$$

descartamos el término $\frac{F_0}{(2\omega)^2} \operatorname{sen} \omega t$ ya que esta en x_h; la solución general es $x(t) = x_h + x_p = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t$. Con las condiciones iniciales hallamos C_1 y C_2 y obtenemos (ver figura 4.9):

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_h(t) + x_p(t) = \frac{F_0 \operatorname{sen} \omega t}{2\omega^2} - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t \\
|x(t)| &= \left| \frac{F_0 \operatorname{sen} \omega t}{2\omega^2} - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t \right| \stackrel{t \to \infty}{\longrightarrow} \infty
\end{aligned}$$

NOTA: la E.D. del movimiento vibratorio de los resortes también se aplica en:

a). Circuitos en serie, en este caso, la E.D. es

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

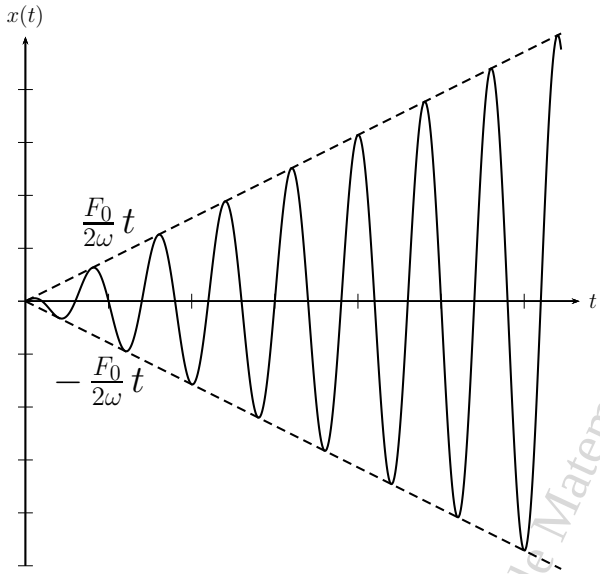


Figura 4.9 Resonancia

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Donde (ver figura 4.10)

- $q(t)$ es la carga instantánea (medida en culombios)
- $E(t)$ es el voltaje o fuerza electromotriz suministrada (medida en voltios)
- L es la inductancia (medida en henrios)
- R es la resistencia (medida en ohmios)
- C es la capacitancia (medida en faradios)

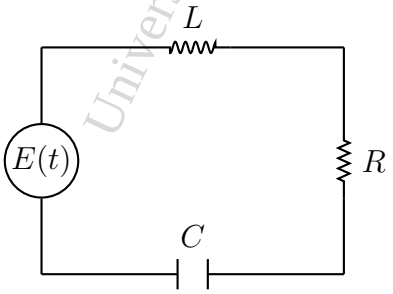


Figura 4.10

b). Barra de torsión.
La E.D. que rige el movimiento de torsión de un cuerpo suspendido del extremo de un eje elástico es (ver figura 4.11)

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + k\theta = T(t)$$

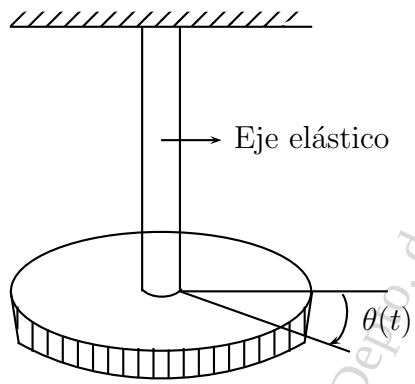


Figura 4.11

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

donde

- I es el momento de inercia del cuerpo suspendido
- c es la constante de amortiguación
- k es la constante elástica del eje
- $T(t)$ es la fuerza de torsión exterior suministrada al cuerpo

c). Movimiento pendular; un péndulo es una masa m atada al extremo de una cuerda de longitud a y de masa despreciable y el otro extremo fijo. Hallemos la E.D. que rige su movimiento sin fricción.

Por la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta que la componente del peso en la dirección tangencial es $mg \operatorname{sen}\theta$, se tiene que

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta, \tag{4.14}$$

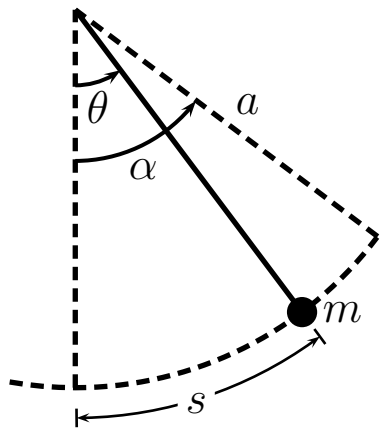


Figura 4.12

pero $s = a\theta$, luego $\frac{d^2s}{dt^2} = a\frac{d^2\theta}{dt^2}$ y sustituyendo en 4.14 se obtiene

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \operatorname{sen}\theta \tag{4.15}$$

de la cual obtenemos la E.D. no lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{a}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{4.16}$$

Para valores pequeños de θ, se tiene que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ y por tanto

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{a}\theta = 0 \tag{4.17}$$

que es una E.D. lineal. El proceso anterior lo llamamos linealización de una E.D. no lineal.

En forma similar obtenemos la E.D. para el péndulo amortiguado

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{a}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{4.18}$$

donde c es la constante de amortiguamiento. Linealizando 4.18

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{a}\theta = 0 \tag{4.19}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejemplo 42. Un cilindro homogéneo de radio r pies y peso W libras y momento de inercia $I_g = \frac{W}{g}\frac{r^2}{2}$ (con respecto a su eje g), tiene una cuerda flexible enrollada alrededor de su eje central. Cuando el cuerpo cae la resistencia del aire es $\frac{W}{170}$ veces su velocidad instantánea. Si arranca desde el reposo, hallar la distancia y de caída, en función del tiempo t, la velocidad límite y el porcentaje de velocidad límite adquirido en 20 seg. (Ver figura 4.13)

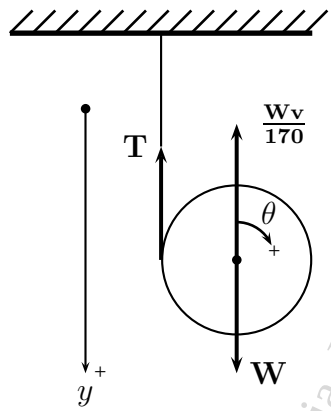


Figura 4.13: yo-yo

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Solución. Si θ es el ángulo de giro alrededor del eje g en sentido horario (ver figura 4.13), entonces $y = r\theta$ y por tanto

$$v = \frac{dy}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \quad \text{y} \quad a = \frac{d^2y}{dt^2} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Por la segunda ley de Newton:

$$\sum \text{ de fuerzas en la dirección del eje } y = m\frac{d^2y}{dt^2} \tag{4.20}$$

luego

$$-T + W - \frac{W}{170}\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2} \tag{4.21}$$

$$\circlearrowright: \sum \text{ de torques alrededor del eje } g = I_g\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$Tr = \frac{W}{g}\frac{r^2}{2}\frac{1}{r}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Wr}{2g}\frac{d^2y}{dt^2} \tag{4.22}$$

despejando T en (4.22) y sustituyendo en (4.21), se tiene

$$-\frac{W}{2g}\frac{d^2y}{dt^2} + W - \frac{W}{170}\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{W}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$\frac{3}{2}\frac{W}{g}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{W}{170}\frac{dy}{dt} = W$$

luego

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{255}\frac{dy}{dt} = \frac{2g}{3}$$

las condiciones iniciales son $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$.

La solución general es

$$y = C_1 + C_2e^{-\frac{g}{255}t} + 170(t - \frac{255}{g})$$

y la solución particular es

$$y = \frac{170 \times 255}{g}e^{-\frac{g}{255}t} + 170(t - \frac{255}{g})$$

la velocidad es

$$y' = -170e^{-\frac{g}{255}t} + 170$$

la velocidad límite

$$\lim_{t\to\infty} y' = 170 = v_l$$

el porcentaje de velocidad límite

$$\frac{y'(20)}{v_l}100 = [\frac{-170e^{-\frac{g}{255}20} + 170}{170}]100 = (1 - e^{-\frac{g}{255}20})100 = (1 - e^{-\frac{4}{51}g})100$$

Resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. Un peso de 8 libras sujeto a un resorte, está sometido a un movimiento armónico simple. Determinar la ecuación del movimiento si la constante del resorte es 1 libra/pie y si el peso se suelta desde un punto que está 6 pulg. bajo la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

abajo de $\frac{3}{2}$ pie/seg. Hallar la solución utilizando el ángulo de fase.
(**Rta.:** $x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2t = \frac{\sqrt{13}}{4}\operatorname{sen}(2t + 0{,}5880)$)

Ejercicio 2. Un peso de 24 libras sujeto al extremo de un resorte lo estira 4 pulg. Encuentre la ecuación del movimiento si el peso, en reposo, se suelta desde un punto que está 3 pulg. sobre la posición de equilibrio.
(**Rta.:** $x(t) = -\frac{1}{4}\cos 4\sqrt{6}t$)

Ejercicio 3. Un extremo de una banda elástica está sujeto a un punto A. Una masa de 1 kg. atada al otro extremo, estira la banda verticalmente hasta un punto B, de tal manera que la longitud AB es 16 cm. mayor que la longitud natural de la banda. Si la masa se estira más, hasta una posición de 8 cm. debajo de B y se suelta; cual será su velocidad (despreciando la resistencia), al pasar por B?
(**Rta.:** $\pm\frac{\sqrt{g}}{5}$ mts./seg.)

Ejercicio 4. Un resorte, cuya constante es $k = 2$, esta suspendido y sumergido en un líquido que opone una fuerza de amortiguación númericamente igual a 4 veces la velocidad instantánea . Si una masa m se suspende del resorte, determinar los valores de m para los cuales el movimiento posterior no sea oscilatorio.
(**Rta.:** $0 < m \leq 2$

Ejercicio 5. Un peso de 32 libras estira un resorte 6 pulgadas. El peso se mueve en un medio que opone una fuerza de amortiguación númericamente igual a β veces la velocidad instantánea. Determinar los valores de β para los cuales el sistema mostrará un movimiento oscilatorio.
(**Rta.:** $0 < \beta < 16$)

Ejercicio 6. Un bloque cúbico de madera cuyo lado mide 1 pie se hunde hasta que su cara superior está a nivel de la superficie del agua y luego se suelta. Se encuentra que el periodo es 1 seg.. Despreciando la resistencia, hallar la E.D. del movimiento del bloque y hallar el peso P del bloque?(Ayuda: la fuerza hacia arriba ejercida sobre el bloque es igual al peso del agua desalojada por el bloque; densidad de peso del agua: $62{,}4 lb/pie^2$)
(**Rta.:** $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{62{,}4g}{P}x = 0, \quad \frac{62{,}4\,g}{4\pi^2}$)

Ejercicio 7. Un bloque cilíndrico de madera, de radio y altura 1 pie y

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

cuya masa es 12,48 libras, flota en el agua (densidad del agua 62,4 libras/pie^3), manteniendo su eje vertical. Si se hunde de tal manera que la superficie del agua quede tangente al bloque y luego se suelta. Cúal será el período de vibración y la ecuación de su movimiento? Desprecie la resistencia.
Ayuda: La fuerza hacia arriba ejercida sobre el bloque es igual al peso del agua desplazada por el bloque.
(**Rta.:** $\frac{2\pi}{\sqrt{5\pi g}}$ seg., $x = (\frac{1}{5\pi} - 1)\cos\sqrt{5\pi g}t$mts.)

Ejercicio 8. Un peso de 10 libras sujeto a un resorte lo estira en 2 pies. El peso se sujeta a un mecanismo de amortiguación que ofrece una resistencia numérica igual a β veces la velocidad instantánea ($\beta > 0$). Determinar los valores de la constante de amortiguación β de modo que el movimiento sea: ⓐ sobreamortiguado, ⓑ críiticamente amortiguado, ⓒ subamortiguado.
(**Rta.:** ⓐ $\beta > \frac{5}{2}$, ⓑ $\beta = \frac{5}{2}$, ⓒ $0 < \beta < \frac{5}{2}$)

Ejercicio 9. Después que un peso de 5 libras se sujeta a un resorte de 5 pies de largo, el resorte mide 6 pies. Se saca el peso de 5 libras y se lo reemplaza por un peso de 8 libras; el sistema completo se coloca en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea; a) Encuentre la ecuación del movimiento si el peso se suelta desde un punto que está a $\frac{1}{2}$ pie bajo la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 3 pie/seg. b) Ecuación con ángulo de fase. c) Encuentre los instantes en los que el peso pasa por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba.
(**Rta.:** a) $x = \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t - \frac{1}{2}e^{-2t}\operatorname{sen} 4t$; b) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2t}\operatorname{sen}(4t + \frac{3\pi}{4})$; c) $t = \frac{n\pi}{4} - \frac{3}{16}\pi, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$)

Ejercicio 10. Una fuerza de 2 libras estira un resorte en un pie. Manteniendo fijo un extremo, se sujeta un peso de 8 libras al otro extremo; el sistema está sobre una mesa que opone una fuerza de roce numéricamente igual a $\frac{3}{2}$ veces la velocidad instantánea. Inicialmente el peso está desplazado 4 pulg. de la posición de equilibrio con el resorte comprimido y se le suelta desde el reposo. Encuentre la ecuación del movimiento si se realiza a lo largo de una recta horizontal, la cual se elige como eje X.
(**Rta.:** $x(t) = -\frac{2}{3}\,e^{-2t} + \frac{1}{3}\,e^{-4t}$)

Ejercicio 11. Un peso de 24 libras estira un resorte en 4 pies. El movimiento subsiguiente se realiza en un medio que ofrece una resistencia numérica-

Universidad de Antioquia - Dpto. de Matemáticas

mente igual a β veces la velocidad instantánea ($\beta > 0$). Si el peso parte de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 2 pies/seg., y si $\beta > 3\sqrt{2}$, comprobar que,

$$x(t) = -\frac{3}{\sqrt{\beta^2 - 18}}\, e^{-\frac{2}{3}\beta t} \operatorname{senh} \frac{2}{3}\sqrt{\beta^2 - 18}\, t$$

Ejercicio 12. Una masa de una libra sujeta a un resorte cuya constante es 9 libras/pie. El medio ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a 6 veces la velocidad instantánea. La masa se suelta desde un punto que está 8 pulg. sobre la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de v_0 pies/seg.. Determinar los valores de v_0 de modo que posteriormente la masa pase por la posición de equilibrio.
(**Rta.:** $v_0 > 2$ pies/seg.)

Ejercicio 13. Un peso de 16 libras estira un resorte en $\frac{8}{3}$ pies. Inicialmente el peso parte del reposo desde un punto que está a 2 pies bajo la posición de equilibrio y el movimiento posterior se realiza en un medio que opone una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a $\frac{1}{2}$ de la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si el peso es impulsado por una fuerza exterior igual a $f(t) = 10\cos 3t$.
(**Rta.:** $x(t) = e^{-\frac{t}{2}}[-\frac{4}{3}\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t - \frac{64}{3\sqrt{47}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{47}}{2}t] + \frac{10}{3}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t))$

Ejercicio 14. Un peso de 4 libras esta suspendido de un resorte cuya constante es 3lbs/pie. El sistema completo se sumerge en un líquido que opone una fuerza de amortiguación numéricamente igual a la velocidad instantánea. A partir de $t = 0$, se aplica sobre el sistema una fuerza exterior $f(t) = e^{-t}$. Determinar la ecuación del movimiento, si el peso se suelta a partir del reposo, desde un punto que esta 2 pies bajo la posición de equilibrio.
(**Rta.:** $x = \frac{26}{17}e^{-4t}\cos 2\sqrt{2}t + \frac{28}{17}\sqrt{2}e^{-4t}\operatorname{sen} 2\sqrt{2}t + \frac{8}{17}e^{-t}$)

Ejercicio 15. Al sujetar una masa de 2 kilogramos a un resorte cuya constante es 32Nw/m, éste queda en reposo en la posición de equilibrio. A partir de $t = 0$, una fuerza $f(t) = 68e^{-2t}\cos(4t)$ se aplica al sistema. Encuentre la ecuación del movimiento en ausencia de amortiguación.
(**Rta.:** $x = -\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{9}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{2}e^{-2t}(\cos 4t - 4\operatorname{sen} 4t)$)

Ejercicio 16. Al sujetar una masa de un slug a un resorte, éste se estira 2 pies y luego queda en reposo en la posición de equilibrio. A partir de $t = 0$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

una fuerza exterior $f(t) = 8\,\mathrm{sen}\,4t$ se aplica al sistema. Hallar la ecuación del movimiento, si el medio que rodea al sistema opone una fuerza de amortiguación igual a 8 veces la velocidad instantánea.
(**Rta.:** $x = \frac{1}{4}e^{-4t} + te^{-4t} - \frac{1}{4}\cos 4t$)

Ejercicio 17. Hallar las E.D. del sistema de resortes acoplados con constantes k_1 y k_2 y masas m_1 y m_2 respectivamente, como se muestra en la figura 4.14
(**Rta.:** $m_1\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x + k_2(y-x), \;\; m_2\frac{d^2y}{dt^2} = -k_2(y-x)$)

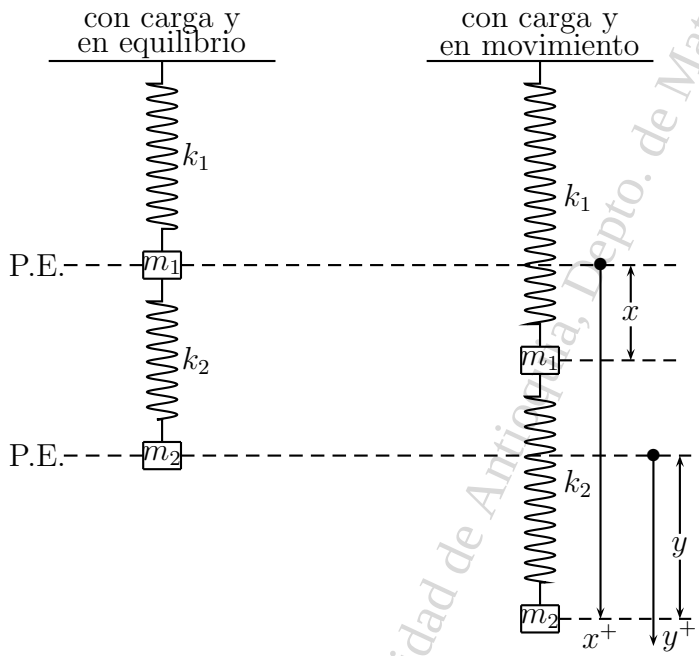


Figura 4.14

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejercicio 18. Hallar las E.D. del sistema de tres resortes acoplados con constantes k_1, k_2, k_3 y masas m_1 y m_2 respectivamente, como se muestra en la figura 4.15
(**Rta.:** $m_1\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x + k_2(y-x), \;\; m_2\frac{d^2y}{dt^2} = -k_2(y-x) - k_3y$)

Ejercicio 19. Un peso de 4 libras estira un resorte una pulgada. Si un peso de una libra se coloca en un extremo del resorte y el otro extremo se

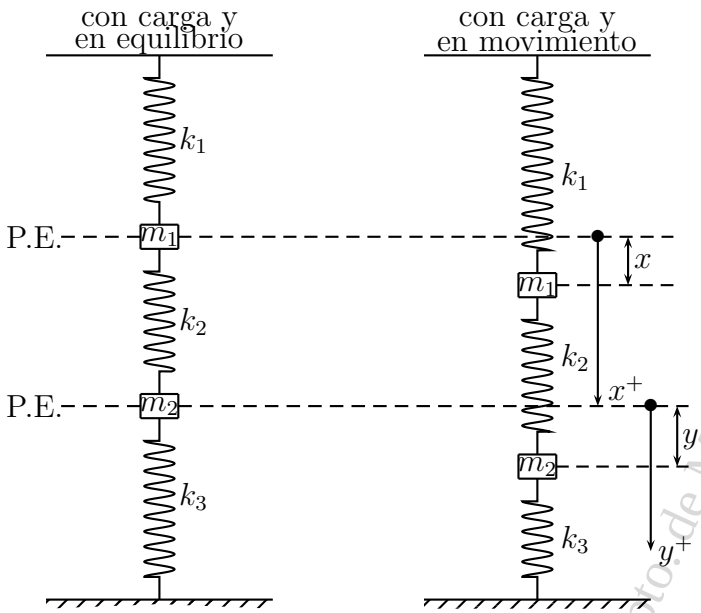


Figura 4.15

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

mueve de acuerdo a $y = \operatorname{sen}\sqrt{3g}t$. Encontrar la E.D. del movimiento del peso y resolverla.
(**Rta.:** $\frac{1}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -4(x-y), \quad x = -2\sqrt{3}\operatorname{sen} 2\sqrt{g}\ t + 4\operatorname{sen}\sqrt{3g}\ t$)

Ejercicio 20. Dos pesos de 96 libras y 64 libras se mueven horizontalmente en una superficie lisa, cada resorte tiene $k = k_1 = k_2 = 600$. En $t = 0$ los resortes están sin estirar y el de peso 96 tiene una velocidad de 600 pies/seg. alejándose del muro y el otro esta en reposo. Encontrar las E.D. del movimiento . (Ver figura 4.16)
(**Rta.:** $m_1\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x + k_2(y-x), \quad m_2\frac{d^2y}{dt^2} = -k_2(y-x)$)

Ejercicio 21. El resorte de la figura 4.17 tiene una longitud l cuando esta sin estirar; el collar situado en un extremo del resorte tiene un peso W y se desliza por la varilla horizontal sin fricción. Expresar la aceleración en función de x; hallar la velocidad cuando pasa por C, si se suelta desde el reposo a una distancia $x = x_0$.
(**Rta.:** $v = \sqrt{\frac{gk}{W}}(\sqrt{l^2 + x_0^2} - l)$)

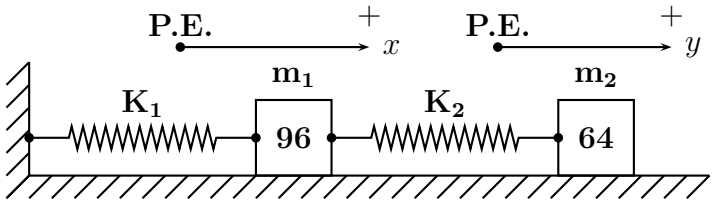


Figura 4.16

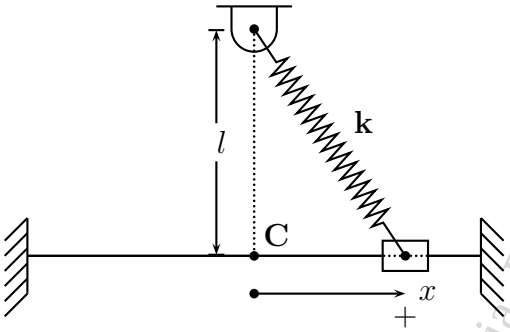


Figura 4.17

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejercicio 22. En la figura 4.18 el cilindro de radio r esta suspendido de una cuerda y un resorte como lo indica la figura, el resorte tiene una constante k. Hallar el periodo y la frecuencia de vibración del cilindro.
(**Rta.:** $T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{8}\frac{m}{k}}$, $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}}$, donde m es la masa del cilindro.)

4.12. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Ejemplo 42. Hallar con el paquete Maple las raíces del polinomio característico de la E.D. $y^{(5)} + 5y^{(4)} - 2y^{(3)} - 10y'' + y' + 5y = 0$
Solución: la ecuacióm característica de esta E.D. es

$$m^5 + 5m^4 - 2m^3 - 10m^2 + m + 5 = 0$$

Efectuamos los siguientes comandos:

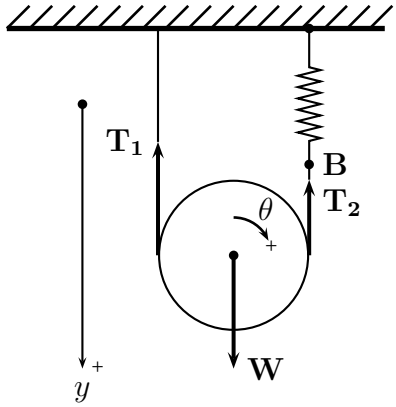


Figura 4.18

```
>eq := m^5+5*m^4-2*m^3-10*m^2+m+5=0;
```

$$eq := m^5 + 5 * m^4 - 2 * m^3 - 10 * m^2 + m + 5 = 0$$

```
>solve(eq,m);
```

$$-5, -1, -1, 1, 1$$

```
>sols := [solve(eq,m)];
```

$$sols := [-5, -1, -1, 1, 1]$$

Ejemplo 43. Hallar la solución general y la particular de la E.D.

$$(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3$, graficar la solución particular

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

```
> restart;
> DE(tools):diff(y(x),x,x,x)-3*diff(y(x),x,x)+9*diff(y(x),x)+13*y(x)=0;
```

$$\frac{d^3}{dx^3}y(x) - 3\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 9\frac{d}{dx}y(x) + 13y(x) = 0$$

```
> dsolve({%,y(0)=1,D(y)(0)=2,D(D(y))(0)=3},y(x));
```

$$y(x) = \frac{4}{9}e^{(-x)}\frac{4}{9}e^{(2x)}\,\mathrm{sen}\,(3x) + \frac{5}{9}e^{(2x)}\cos(3x)$$

```
>plot(rhs(%)
```

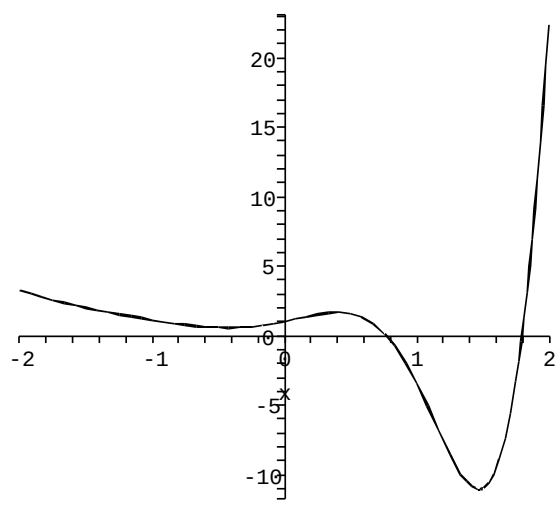


Figura 4.19

Ejemplo 44. Resolver con el paquete Maple la E.D. $y'' + 25y = 20\,\mathrm{sen}\,5x$

Solución:

```
>restart;
>y(x):=C*x*cos(5*x)+F*x*sin(5*x);
```

$$y(x) := Cxcos(5x) + Fxsin(5x)$$

```
>yp:=diff(y(x),x);
```

$$yp := Ccos(5x) - 5Cxsin(5x) + Fsin(5x) + 5Fxcos(5x)$$

```
>ypp:=diff(yp,x);
```

$$ypp := -10Csin(5x) - 25Cxcos(5x) + 10Fcos(5x) - 25Fxsin(5x)$$

```
>ypp+25*y(x)-20*sin(5*x)=0;
```

$$-10Csin(5x) + 10Fcos(5x) - 20sin(5x) = 0$$

```
> collect(%,[cos(5*x),sin(5*x)]);
```

$$10Fcos(5x) + (-10C - 20)sin(5x) = 0$$

```
> solve({10*F=0,-10*C-20=0},{F,C});
```

$$F = 0, C = -2$$

Ejemplo 45. Resolver con el paquete Maple la E.D. por el método de variación de parámetros $y'' + y = \sec x \tan x$

```
>with(linalg):y1:=cos(x);y2:=sin(x);fx:=sec(x)*tan(x);
```

$$y1 := \cos(x)$$
$$y2 := \operatorname{sen}(x)$$
$$fx := \sec(x)\tan(x)$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

```
>y:=vector([y1,y2]);
```

$$y := [\cos(x), \operatorname{sen}(x)]$$

```
>M:=wronskian(y,x);
```

$$M := \begin{bmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$$

```
>ApBp:=linsolve(M,[0,fx]);
```

$$ApBp := [-\frac{\operatorname{sen}(x)\sec(x)\tan(x)}{(\operatorname{sen}(x))^2 + (\cos(x))^2}, \frac{\cos(x)\sec(x)\tan(x)}{(\operatorname{sen}(x))^2 + (\cos(x))^2}]$$

```
>A:=int(simplify(ApBp[1]),x);
```

$$A := -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + x$$

```
>B:=int(simplify(ApBp[2]),x);
```

$$B := -\ln(\cos(x))$$

```
>SolGen:=C1*y1+C2*y2+A*y1+B*y2;
```

$$SolGen := C1\cos(x) + C2\operatorname{sen}(x) + \left(-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + x\right)\cos(x) - \ln(\cos(x))\operatorname{sen}(x)$$

```
>simplify((SolGen),trig);
```

$$C1\cos(x) + C2\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x) + x\cos(x) - \ln(\cos(x))\operatorname{sen}(x)$$

observese que en la solución general anterior la expresión $-\operatorname{sen}(x)$ es absorbida por $C2\operatorname{sen}(x)$, quedando como solución general:

$$C1\cos(x) + C2\operatorname{sen}(x) + x\cos(x) - \ln(\cos(x))\operatorname{sen}(x)$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

CAPÍTULO 5

SOLUCIONES POR SERIES

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

5.1. INTRODUCCION

- Una serie de potencias en $(x-a)$, es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n.$$

- Toda serie de potencias tiene un intervalo de convergencia que consiste de todos los puntos para los cuales la serie es convergente, por ésto, decimos que una serie de potencias define una función cuyo dominio es, precisamente, el intervalo de convergencia.

- Una serie de potencias converge absolutamente en un número x, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \, |x-a|^n$$

  es convergente .

- Todo intervalo de convergencia tiene un radio de convergencia R.

- Una serie de potencias converge absolutamente para $|x-a| < R$ y diverge para $|x-a| > R$. Cuando $R = 0$, la serie sólo converge en $x = a$. Cuando $R = \infty$, la serie converge para todo x.

- El radio de convergencia se obtiene mediante el criterio de la razón, en efecto, como

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}(x-a)^{n+1}}{C_n(x-a)^n}\right| = |x-a|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = L|x-a| < 1$$

  donde $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|$ y como la serie es convergente cuando $|x-a| < R$, entonces el radio de convergencia es $R = \frac{1}{L}$.

- Si $R \neq 0$ ó $R \neq \infty$, el intervalo de convergencia puede o no incluir los extremos $a - R$, $a + R$ de dicho intervalo.

- Una serie de potencias representa una función continua en el interior de su intervalo de convergencia.

- Una serie de potencias puede ser derivada término a término en el interior de su intervalo de convergencia.

- Una serie de potencias puede ser integrada término a término en el interior de su intervalo de convergencia.

- Dos series de potencias pueden ser sumadas término a término si tienen un intervalo común de convergencia.

SERIES MACLAURIN DE ALGUNAS FUNCIONES

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
   convergente para todo x real (o sea para $-\infty < x < \infty$)

2. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
   convergente para todo x real.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
   convergente para todo x en los reales.

4. $\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
   convergente para todo x real.

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matemáticas

5. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
   convergente para todo x en los reales.

6. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$
   convergente para x en el intervalo $-1 < x < 1$

7. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$
   convergente para x en el intervalo $-1 < x \leq 1$

8. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
   convergente para x en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$

9. $\operatorname{sen}^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
   convergente para todo x en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$

10. Serie binomial:
    $(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)x^2}{2!} + \frac{r(r-1)(r-2)x^3}{3!} + \ldots$
    convergente para x en el intervalo $-1 < x < 1$

5.2. SOLUCION EN PUNTOS ORDINARIOS

Supongamos que la ecuación

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

se puede escribir así:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

donde $a_2(x) \neq 0$ en I y $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Definición 5.1 (**Punto Ordinario).** *Se dice que $x = a$ es un punto ordinario de la E.D. $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, si $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en $x = a$, es decir, si $P(x)$ y $Q(x)$ se pueden expandir en serie de potencias de $x - a$ con un radio de convergencia positivo.*

Nota: si un punto no es ordinario se dice que es singular.

RECORDEMOS: serie Taylor de $y(x)$ en $x = a$ es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n,$$

luego, toda función que tenga un desarrollo en serie Taylor alrededor de $x = a$ es analítica en $x = a$.

En particular cuando $x = 0$ a la serie Taylor se le llama serie Maclaurin de $y(x)$ y la serie tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!}\,(x)^n,$$

luego, toda función que tenga un desarrollo en serie Maclaurin es analítica en $x = 0$.

Ejemplo 1. Hallar los puntos ordinarios y singulares de
$y'' + \operatorname{sen} x y' + e^x y = 0$

<u>Solución</u>: $\operatorname{sen} x$: tiene expansión Taylor para cualquier a
e^x: tiene expansión Taylor para cualquier a.
Es decir todo a en $\mathbf{R}$ es punto ordinario de la ecuación diferencial, por tanto no tiene puntos singulares.

Ejemplo 2. Hallar los puntos ordinarios y singulares de
$xy'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$
<u>Solución</u>:

$$y'' + \overbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}^{Q(x)}\, y = 0$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$Q(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$\Rightarrow x = 0$ es punto ordinario de la E.D.,por tanto todos los $x \neq 0$ son puntos singulares.

Ejemplo 3. Hallar los puntos ordinarios y singulares de
$y'' + (\ln x)y = 0$

Solución: $x = 0$ es un punto singular ya que $\ln x$ no tiene expansión en $x = 0$, todos los demás puntos diferentes de cero son puntos ordinarios.

Analicemos el caso en que $a_2(x), a_1(x)$ y $a_0(x)$ son polinomios. Si en la E.D. $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ se tiene que $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ son polinomios sin factores comunes, o sea, sin raíces comunes, entonces $x = a$ es :

i) Un punto ordinario si $a_2(a) \neq 0$ es decir, $x = a$ no es raíz del polinomio $a_2(x)$.

ii) Un punto singular si $a_2(a) = 0$, es decir, si a es raíz de $a_2(x)$.

Ejemplo 4. Hallar los puntos ordinarios y singulares de
$(x^2 - 4)y'' + 2xy' + 3y = 0$
Solución:
$a_2(x) = x^2 - 4 = 0$, luego $x = \pm 2$ son puntos singulares y $x \neq \pm 2$ son puntos ordinarios.

Teorema 5.1.

Si $x = a$ es un punto ordinario de la ecuación

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

siempre podemos encontrar dos soluciones distintas (linealmente independientes), en serie de potencias; soluciones que son de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n.$$

Una solución en serie de potencias converge por lo menos para $|x - a| < R_1$, donde R_1 es la distancia de a al punto singular más cercano.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Nota: para simplificar supondremos que el punto ordinario es $a = 0$, si $a \neq 0$, se hace la sustitución $t = x - a$. Esta sustitución convierte la E.D. en otra E.D. con punto ordinario $t = 0$.

Ejemplo 5. Resolver por series la E.D. $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$
Solución:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ son puntos singulares y los $x \neq \pm 1$ son puntos ordinarios.

Trabajemos con el punto ordinario $x = 0$, los candidatos a solución son de la forma $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

Debemos hallar las C_n: derivamos dos veces:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

Pasamos a sustituir $y'(x)$ y $y''(x)$ en la E.D. original:

$$x^2y'' - y'' + 4xy' + 2y = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 4n\, C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2\, C_n x^n = 0$$

Homogenizamos las potencias de x:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^n - \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)C_{m+2} x^m + \sum_{n=1}^{\infty} 4n\, C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2\, C_n x^n = 0$$

haciendo $\begin{cases} n - 2 = m & \Rightarrow n = m + 2 \\ n = 2 & \Rightarrow m = 0 \end{cases}$

Escribimos todo en términos de k:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 4k\, C_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2\, C_k x^k = 0$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ahora homogenizamos el índice de las series:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C_k x^k - 2C_2 - (3)(2)C_3 x - \sum_{k=2}^{\infty}(k+2)(k+1)C_{k+2}x^k + 4C_1 x +$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} 4k\, C_k x^k + 2C_0 + 2C_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} 2\, C_k x^k = 0$$

luego

$$2C_0 - 2C_2 + (6C_1 - 2\cdot 3C_3)x + \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)C_k - (k+2)(k+1)C_{k+2} + 4kC_k + 2C_k]x^k = 0$$

Comparando coeficientes:

$$x^0 : 2C_0 - 2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = C_0$$

$$x^1 : 6C_1 - 6C_3 = 0 \Rightarrow C_1 = C_3$$

$$x^k : [k(k-1) + 4k + 2]C_k - (k+2)(k+1)C_{k+2} = 0 \qquad k = 2, 3, \ldots$$

$$(k^2 + 3k + 2)C_k - (k+2)(k+1)C_{k+2} = 0$$

$$(k+2)(k+1)C_k - (k+2)(k+1)C_{k+2} = 0$$

$$C_{k+2} = \frac{(k+2)(k+1)}{(k+2)(k+1)}C_k$$

$$\underbrace{C_{k+2} = C_k}_{\text{Fórmula de recurrencia para los coeficientes}} \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Iteremos la fórmula de recurrencia:

$$k = 2 : C_4 = C_2 = C_0$$

$$k = 3 : C_5 = C_3 = C_1$$

$$k = 4 : C_6 = C_4 = C_0$$

$$k = 5 : C_7 = C_5 = C_1$$

Universidad de Antioquia Depto. de Matematica

Volviendo a

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + C_6 x^6 + \dots$$

$$= C_0 + C_1 x + C_0 x^2 + C_1 x^3 + C_0 x^4 + C_1 x^5 + C_0 x^6 + \dots$$

La solución general:

$$= C_0(\underbrace{1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots}_{y_1(x)}) + C_1(\underbrace{x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n+1} + \dots}_{y_2(x)})$$

$$= C_0 \frac{1}{1-x^2} + C_1 x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots)$$

$$= C_0 \frac{1}{1-x^2} + \frac{C_1 x}{1-x^2} \quad \text{ya que} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Siendo $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes.

El siguiente ejercicio resuelto, sólo tiene validez para E.D. con condiciones iniciales. Si la condición inicial está en $x = 0$, utilizamos las series Maclaurin y si la condición inicial está en $x = a$, utilizamos la serie Taylor.

Ejemplo 6. $y'' - e^{-x} y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 1$
<u>Solución</u>.

Serie Maclaurin de $y(x)$.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0) x^n}{n!}$$

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1$$

De la ecuación tenemos que

$$y''(x) = e^{-x} y(x), \quad \text{evaluando en } x = 0 \Rightarrow y''(0) = 1 \times 1 = 1$$

Derivando nuevamente tenemos que:

$$y'''(x) = e^{-x} y'(x) - e^{-x} y(x)$$

Universidad de Antioquia. Depto. de Matemáticas

evaluando en

$$x = 0 \Rightarrow y'''(0) = 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0$$

$$y^{(iv)}(x) = e^{-x}(y''(x) - y'(x)) - e^{-x}(y'(x) - y(x))$$

$$\overset{x=0}{\Rightarrow} y^{(iv)}(0) = 1(1-1) - 1(1-1) = 0$$

$$y^{(v)}(x) = e^{-x}(y'''(x) - 2y''(x) + y'(x)) - e^{-x}(y''(x) - 2y' + y(x)$$

$$y^{(v)}(0) = 1(0 - 2(1) + 1) - 1(1 - 2(1) + 1) = -1$$

Sustituyendo en la fórmula de Maclaurin:

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Resolver por series los siguientes ejercicios en el punto ordinario $x = 0$:

Ejercicio 1. $y'' - 2xy' + 8y = 0 \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$
(**Rta:** $y = 3 - 12x^2 + 4x^4$)

Ejercicio 2. $(x^2 - 1)y'' - 6y = 0$
(**Rta:** $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(2n-1)(2n-3)} x^{2n} + C_1(x - x^3)$)

Ejercicio 3. $y'' - xy = 0$
(**Rta:** $y = C_0(1 + \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{6\cdot 5}\frac{1}{3\cdot 2}x^6 + \frac{1}{9\cdot 8}\frac{1}{6\cdot 5}\frac{1}{3\cdot 2}x^9 + \dots) + C_1(x + \frac{1}{4\cdot 3}x^4 + \frac{1}{7\cdot 6}\frac{1}{4\cdot 3}x^7 + \frac{1}{10\cdot 9}\frac{1}{7\cdot 6}\frac{1}{4\cdot 3}x^{10} + \dots)$)

Ejercicio 4. $(x^2 + 1)y'' + 6xy' + 6y = 0$
(**Rta:** $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{2n+1}$)

Ejercicio 5. $y'' - xy' - y = 0$
(**Rta:** $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \dots 2n} x^{2n} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \dots (2n+1)} x^{2n+1}$)

Ejercicio 6. $y'' + e^{-x}y = 0$
(Sugerencia: Hallar la serie e^{-x} y multiplicarla por la serie de y)
(**Rta:** $y = C_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{40} + \frac{11x^6}{6!} \cdots) + C_1(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^6}{360} \cdots)$)

Ejercicio 7. $(x - 1)y'' + y' = 0$
(**Rta:** $y_1 = C_0, \quad y_2 = C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = C_1 \ln|x - 1|$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejercicio 8. $(1+x^2)y''+2xy'-2y=0$
(**Rta:** $y(x)=C_0(1+x\tan^{-1}x)+C_1x$)

Ejercicio 9. $y''-xy'+y=-x\cos x, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=2$
(**Rta:** $y(x)=x+\operatorname{sen} x$)

Ejercicio 10. $y''-2xy'+4y=0$ con $y(0)=1$ y $y'(0)=0$
(**Rta:** $y=1-2x^2$)

Ejercicio 11. $(1-x)^2y''-(1-x)y'-y=0$ con $y(0)=y'(0)=1$
(**Rta:** $y=\frac{1}{1-x}$)

Ejercicio 12. $y''-2xy'-2y=x$ con $y(0)=1$ y $y'(0)=-\frac{1}{4}$
(**Rta:** $y=e^{x^2}-\frac{x}{4}$)

Ejercicio 13. $y''+xy'+(2x-1)y=x$ con $y(0)=2$ y $y'(0)=3$. Hallar los primeros 6 términos de la solución particular.
(**Rta:** $y=2+3x+x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{12}x^4-\frac{11}{120}x^5-\ldots$)

Ejercicio 14. Hallar la solución particular de la E.D. de Ayry, alrededor del punto ordinario $x=1$

$$y''-xy=0 \qquad y(1)=1, \quad y'(1)=0$$

(**Rta.:** $y=1+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}+\frac{(x-1)^4}{4!}+\frac{4(x-1)^5}{5!}+\ldots$)

Ejercicio 15. Hallar la solución particular de la E.D.

$$y''-2xy-2y=x \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=-\frac{1}{4}$$

(**Rta.:** $y=-\frac{x}{4}+e^{x^2}$)

Ejercicio 16. Resolviendo por series, mostrar que la solución de la E.D.

$$(x-1)y''-xy'+y=0 \quad \text{con} \quad y(0)=-2, \quad y'(0)=6$$

es $y=8x-2e^x$.

Ejercicio 17. $y''+xy'+y=0$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

a). Hallar dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$, $y_2(x)$

b). Usando el criterio del cociente, mostrar que las dos series son convergentes para todo x.

c). Probar que $y_1(x) = e^{-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}$

d). Usando el método de reducción de orden de D'Alembert, hallar $y_2(x)$

(**Rta:** a). $y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots$, $y_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3\cdot 5} - \frac{x^7}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots$)

Ejercicio 18. La E.D. de Legendre de orden α es:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \text{ con } \alpha > -1$$

Mostrar:

a) Que las fórmulas de recurrencia son:

$$C_{2m} = \frac{(-1)^m \alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\ldots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\ldots(\alpha+2m-1)}{(2m)!} C_0$$

$$C_{2m+1} = \frac{(-1)^m (\alpha-1)(\alpha-3)\ldots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\ldots(\alpha+2m)}{(2m+1)!} C_1$$

b) Las dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = C_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m} x^{2m}$$

$$y_2 = C_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m+1} x^{2m+1}$$

donde a_{2m} y a_{2m+1} son las fracciones encontradas en a), pero sin $(-1)^m$

c) Si α es entero no negativo y par, entonces $a_{2m} = 0$ para $2m > n$; mostrar que y_1 es un polinomio de grado n y y_2 es una serie infinita.
Si α es entero no negativo e impar; mostrar que $a_{2m+1} = 0$ para $2m+1 > n$ y y_2 es un polinomio de grado n y y_1 es una serie infinita.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemática

d) Se acostumbra tomar la constante arbitraria (C_0 o C_1 según el caso) de tal manera que el coeficiente de x^n en el polinomio y_1 o y_2 (según el caso) sea $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ y se les llama polinomios de Legendre$P_n(x)$. Mostrar que:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

donde N =parte entera de $\frac{n}{2}$

e) Mostrar que los 6 primeros polinomios de Legendre son:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3), & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x) \end{aligned}$$

Ejercicio 19. Fórmula de Rodriguez:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

para el polinomio de Legendre de grado n.

a) Mostrar que $u = (x^2-1)^n$ satisface la E.D.

$$(1-x^2)u' + 2nxu = 0$$

Derive ambos lados de la E.D. y obtenga

$$(1-x^2) + 2(n-1)xu' + 2nu = 0$$

b) Derive sucesivamente, n veces ambos lados de la ecuación y obtenga:

$$(1-x^2)u^{(n+2)} - 2xu^{(n+1)} + n(n+1)u^{(n)} = 0$$

Hacer $v = u^{(n)}$ y mostrar que $v = D^n(1-x^2)^n$ y luego mostrar que v satisface la ecuación de Legendre de orden n

c) Demostrar que el coeficiente de x^n en v es $\frac{(2n)!}{n!}$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

d) Explicar porqué c) demuestra la fórmula de Rodriguez (Notar que el coeficiente de x^n en $P_n(x)$ es $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$)

Ejercicio 20. La E.D.

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

se le llama ecuación de Hermite de orden α.

a) Mostrar que las dos soluciones en serie de potencias son:

$$y_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{2^m \alpha(\alpha-2)\dots(\alpha-2m+2)}{(2m)!} x^{2m}$$

$$y_2 = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{2^m (\alpha-1)(\alpha-3)\dots(\alpha-2m+1)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

b) Si α es entero par, mostrar que y_1 es un polinomio.
Si α es impar, mostrar que y_2 es un polinomio.

c) El polinomio de la parte b) se denota por $H_n(x)$ y se le llama polinomio de Hermite cuando el coeficiente de x^n es 2^n.

d) Demostrar que los 6 primeros polinomios de Hermite son:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, & H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, & H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned}$$

e) La formula general de los polinomios de Hermite es

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

Por inducción mostrar que genera un polinomio de grado n.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

5.3. SOLUCIONES EN TORNO A PUNTOS SINGULARES REGULARES

Definición 5.2 (**Punto singular**).

i. Decimos que $x = x_0$ es un punto singular regular de la E.D.O.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

si $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2Q(x)$ son analíticas en $x = x_0$, es decir, si $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2Q(x)$ tienen desarrollos en series de potencias de $(x - x_0)$. Si $x = x_0$ no cumple con la anterior definición, entonces decimos que $x = x_0$ es un punto **singular irregular**.

ii. Si en la E.D.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

se tiene que $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ son polinomios sin factores comunes, entonces decimos que $x = x_0$ es un punto **singular regular** *si $a_2(x_0) = 0$ y además, si en $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$, el factor $x - x_0$ tiene a lo sumo grado uno en el denominador de $P(x)$ y grado a lo sumo dos en el denominador de $Q(x)$.*

Ejemplo 7. Hallar los puntos singulares regulares e irregulares de

$$(x^2 - 4)^2y'' + (x - 2)y' + y = 0$$

<u>Solución</u>:
Puntos singulares:

$$a_2(x) = (x^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$P(x) = \frac{x - 2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{1}{(x - 2)(x + 2)^2}$$

$$Q(x) = \frac{1}{(x - 2)^2(x + 2)^2}$$

- Con $x = +2$, como $(x - 2)$ es un factor de grado uno en $P(x)$ y de grado dos en $Q(x)$, por lo tanto $x = 2$ es punto singular regular.
- Con $x = -2$ es punto singular irregular, porque $x+2$ aparece con grado dos en el denominador de $P(x)$.

Universidad de Antioquia Dep. de Matemáticas

Nota: los puntos singulares pueden ser números complejos.

Teorema 5.2 (de Frobenius).

Si $x = x_0$ es un punto singular regular de la E.D.O.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

entonces existe al menos una solución en serie de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+r},$$

donde r es una constante a determinar.
Esta serie converge en un intervalo de la forma $0 < x - x_0 < R$.

Ejemplo 8. Utilizar el teorema de Frobenius para hallar dos soluciones linealmente independientes de la E.D. $3xy'' + y' - y = 0$
Solución:

$x = 0$ es punto singular y es regular porque

$$P(x) = \frac{1}{3x}, \quad Q(x) = -\frac{1}{3x}$$

Suponemos una solución de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-2}$$

y sustituimos en la E.D.

$$3xy''+y'-y = \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)C_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2)C_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

Universidad de Antioquia, Dep. de Matematicas

$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)C_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n\right]=0$$

Sacamos la potencia más baja:

$$x^r\left[r(3r-2)C_0x^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)C_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n\right]=0$$

$$\text{hagamos}\begin{cases} k=n-1 & \Rightarrow n=k+1 \\ n=1 & \Rightarrow k=0 \end{cases}$$

$$x^r\left[r(3r-2)C_0x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r+1)(3k+3r+1)C_{k+1}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k\right]=0$$

$$x^r\left[r(3r-2)C_0x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+r+1)(3k+3r+1)C_{k+1}-C_k\right]x^k\right]=0$$

en potencias de:

$$x^{-1}:\ r(3r-2)C_0=0$$

y en potencias de:

$$x^k:\ (k+r+1)(3k+3r+1)C_{k+1}-C_k=0 \quad \text{con} \quad k=0,1,2,\ldots$$

si $C_0\neq 0\Rightarrow \underbrace{r(3r-2)=0}_{\text{ec. indicial}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r_2=0 \quad r_1=\dfrac{2}{3}}_{\text{índices (o exponentes) de la singularidad}}$ y

$$C_{k+1}=\frac{C_k}{(k+r+1)(3k+3r+1)},\quad k=0,1,2,\ldots$$

Con $r_1=\frac{2}{3}$ que es la raíz mayor, entonces:

$$C_{k+1}=\frac{C_k}{(k+\frac{5}{3})(3k+3)}=\frac{C_k}{(3k+5)(k+1)},\quad k=0,1,\ldots \tag{5.1}$$

Con $r_2=0$ entonces:

$$C_{k+1}=\frac{C_k}{(k+1)(3k+1)},\quad k=0,1,\ldots \tag{5.2}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Iteremos (5.1):

$$
\begin{aligned}
k=0:\ C_1 &= \frac{C_0}{5\times 1}\\
k=1:\ C_2 &= \frac{C_1}{8\times 2} = \frac{C_0}{(5\times 1)\times(8\times 2)} = \frac{C_0}{2!\times(5\times 8)}\\
k=2:\ C_3 &= \frac{C_2}{11\times 3} = \frac{C_0}{(5\times 1)\times(8\times 2)\times(11\times 3)} = \frac{C_0}{3!\times 5\times 8\times 11}\\
k=3:\ C_4 &= \frac{C_3}{14\times 4} = \frac{C_0}{4!\times 5\times 8\times 11\times 14}
\end{aligned}
$$

generalizando

$$
C_n = \frac{C_0}{n!\times 5\times 8\times 11\times 14\ldots(3n+2)} \qquad n=1,2,\ldots
$$

Iteremos (5.2):

$$
\begin{aligned}
k=0:\ C_1 &= \frac{C_0}{1\times 1}\\
k=1:\ C_2 &= \frac{C_1}{2\times 4} = \frac{C_0}{(1\times 1)\times(2\times 4)}\\
k=2:\ C_3 &= \frac{C_2}{3\times 7} = \frac{C_0}{(1\times 1)\times(2\times 4)\times(3\times 7)} = \frac{C_0}{3!\times 4\times 7}\\
k=3:\ C_4 &= \frac{C_3}{4\times 10} = \frac{C_0}{4!\times 4\times 7\times 10}
\end{aligned}
$$

generalizando

$$
C_n = \frac{C_0}{n!\times 1\times 4\times 7\times 10\ldots(3n-2)} \qquad n=1,2,\ldots
$$

$$
\begin{aligned}
r_1=\frac{2}{3}\Rightarrow y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = x^{\frac{2}{3}}\left[C_0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n\right]\\
&= x^{\frac{2}{3}}\left[C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_0}{n!\times 5\times 8\times 11\times 14\ldots(3n+2)}\,x^n\right]\\
&= C_0 x^{\frac{2}{3}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!\times 5\times 8\times 11\times 14\ldots(3n+2)}\right]
\end{aligned}
$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

$$\begin{aligned} r_2 = 0 \Rightarrow y_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+0} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_0}{n! \times 1 \times 4 \times 7 \times 10 \ldots (3n-2)} x^n \\ &= C_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! \times 1 \times 4 \times 7 \times 10 \ldots (3n-2)} \right] \end{aligned}$$

Luego la solución general es :

$$\begin{aligned} y &= k_1 y_1 + k_2 y_2 \\ &= k_1 C_0 \, x^{\frac{2}{3}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! \times 5 \times 8 \times 11 \times 14 \ldots (3n+2)} \right] + \\ & k_2 C_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! \times 1 \times 4 \times 7 \times 10 \ldots (3n-2)} \right] \end{aligned}$$

observemos que para este ejemplo

$$r_1 = \frac{2}{3}, \quad r_2 = 0 \Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{2}{3} \neq \textit{entero}$$

Nota: en general si $x = 0$ es un punto singular regular, entonces las funciones $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ son analíticas en $x = 0$, es decir

$$xP(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots$$

$$x^2 Q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots$$

son convergentes en intervalos de radio positivo. Después de sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$ en la E.D. y simplificar, la ecuación indicial es una ecuación cuadrática en r que resulta de igualar a cero el coeficiente de la menor potencia de x. Siguiendo este procedimiento se puede mostrar que la ecuación indicial es

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

Se hallan las raíces de la ecuación indicial y se sustituyen en la relación de recurrencia.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Con las raíces de la ecuación indicial pueden ocurrir los siguientes tres casos.

CASO I: cuando $r_1 - r_2 \neq$ entero positivo ($r_1 > r_2$), entonces las dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_2}$$

Este caso lo hemos contemplado en el Ejemplo 8.

CASO II: cuando $r_1 - r_2 =$ entero positivo ($r_1 > r_2$), entonces las dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1}$$

$$y_2 = C y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \quad b_0 \neq 0,$$

donde C es una constante que puede ser cero.

Nota: para saber si C es cero o diferente de cero, utilizamos la fórmula de D'Alembert; si es cero, entonces en y_2 no aparece el término logarítmico. El próximo ejemplo lo haremos con $C = 0$; si $C \neq 0$, y_2 también se puede hallar utilizando la fórmula de D'Alembert:

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{[y_1(x)]^2}\, dx$$

o también derivando dos veces

$$y_2 = C y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \quad b_0 \neq 0,$$

y sustituyendo en la E.D. e iterando la fórmula de recurrencia para hallar los coeficientes b_n.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

CASO III: cuando $r_1 - r_2 = 0$, entonces las soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1} \quad \text{con} \quad C_0 \neq 0$$

$$y_2 = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r_1} \quad \text{sabiendo que } r_1 = r_2$$

5.3.1. CASO II: $r_1 - r_2 =$ entero positivo

Con el siguiente ejemplo mostramos el CASO II, o sea cuando $r_1 - r_2 =$ entero positivo.

Ejemplo 9. $xy'' + (5 + 3x)y' + 3y = 0$

Solución:

$x = 0$ es punto singular regular, ya que

$$P(x) = \frac{5 + 3x}{x} \qquad Q(x) = \frac{3}{x}$$

Si utilizamos la fórmula de D'Alembert encontramos que después de efectuar todas las operaciones, el primer término no tiene logaritmo, por tanto $C = 0$. Ahora supongamos que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) C_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) C_n x^{n+r-2}$$

sustituyendo en la E.D.

$$xy'' + 5y' + 3xy' + 3y = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 5(n + r) C_n x^{n+r-1} +$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)C_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n x^{n+r} = 0$$

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1+5)C_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r+1)C_n x^n \right] = 0$$

$$x^r \left[r(r+4)C_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r+4)C_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r+1)C_n x^n \right] = 0$$

$$\text{hagamos} \begin{cases} k = n-1 & \Rightarrow n = k+1 \\ \text{cuando } \ n = 1 & \Rightarrow k = 0 \end{cases}$$

luego

$$x^r \left[r(r+4)C_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r+1)(k+r+5)C_{k+1} + 3(k+r+1)C_k] x^k \right] = 0$$

Por lo tanto la ecuación indicial:

$$r(r+4) = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \quad r_2 = -4 \ \text{ o sea que } \ r_1 - r_2 = \text{entero positivo}$$

y la fórmula de recurrencia es

$$(k+r+1)(k+r+5)C_{k+1} + 3(k+r+1)C_k = 0 \quad k = 0, 1, \ldots$$

e iteramos con la menor raíz indicial $r_2 = -4$:

$$(k+1)(k-3)C_{k+1} + 3(k-3)C_k = 0 \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$\begin{aligned}
k = 0 \ &: \ 1(-3)C_1 + 3(-3)C_0 \Rightarrow C_1 = \frac{9C_0}{-3} = -3C_0 \\
k = 1 \ &: \ 2(-2)C_2 + 3(-2)C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{6C_1}{-4} = -\frac{3}{2}(-3)C_0 = \frac{9}{2}C_0 \\
k = 2 \ &: \ 3(-1)C_3 + 3(-1)C_2 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{3C_2}{-3} = -\frac{9}{2}C_0 \\
k = 3 \ &: \ 4(0)C_4 + 3(0)C_3 = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

C_4 es parámetro

$$k \geq 4 \ : \ C_{k+1} = -\frac{3}{(k+1)}C_k$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

es decir

$$C_1 = -3C_0, \quad C_2 = \frac{9}{2}C_0, \quad C_3 = -\frac{9}{2}C_0,$$

C_4 : parámetro

$$k \;\geq\; 4 : C_{k+1} = -\frac{3}{(k+1)}\, C_k \tag{5.3}$$

iteremos (5.3):

$$\begin{aligned}
k &= 4 : C_5 = -\frac{3}{5}\, C_4 \\
k &= 5 : C_6 = -\frac{3}{6}\, C_5 = \frac{3\times 3}{5\times 6}\, C_4 \\
k &= 6 : C_7 = -\frac{3}{7}\, C_6 = -\frac{3\times 3\times 3}{5\times 6\times 7}\, C_4 \\
&= -\frac{3^3 4!}{7!}\, C_4
\end{aligned}$$

generalizando

$$C_n = (-1)^n \frac{3^{(n-4)} 4!}{n!}\, C_4 \quad n \geq 4$$

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n-4} \\
&= x^{-4}[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} C_n x^n] \\
&= x^{-4}[C_0 - 3C_0\, x + \frac{9}{2}C_0\, x^2 - \frac{9}{2}C_0\, x^3 + C_4 x^4 + \\
&\quad + \sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{(n-4)} 4!}{n!}\, C_4\, x^n] \\
&= C_0 \overbrace{x^{-4}\left(1 - 3\,x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3\right)}^{y_1(x)} \\
&\quad + C_4 \overbrace{\left(1 + \sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{(n-4)} 4!}{(n)!}\, x^{n-4}\right)}^{y_2(x)}
\end{aligned}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

hagamos $\begin{cases} k = n-4 & \Rightarrow n = k+4 \\ n = 5 & \Rightarrow k = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} y &= C_0 y_1(x) + C_4 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+4} \frac{3^k 4!}{(k+4)!} x^k \right) \\ &= C_0 y_1(x) + C_4 \underbrace{\left(1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(n+4)!} x^n \right)}_{\text{converge } \forall x \in \mathbf{Re}} \end{aligned}$$

Para abordar el caso iii) cuando $r_1 = r_2$ necesitamos definir la función Gamma.

5.3.2. FUNCIÓN GAMMA: $\Gamma(x)$

Definición 5.3. *Sea $x > 0$. La función Gamma se define así:*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{x-1} \, d\tau$$

Teorema 5.3 (Fórmula de recurrencia para la función Γ).

Para $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Demostración: $\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-\tau}\tau^x \, d\tau = -e^{-\tau}\tau^x|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x e^{-\tau}\tau^{x-1} \, d\tau =$ la anterior integral se hizo por partes,
haciendo $\begin{cases} u = \tau^x \Rightarrow & du = x\tau^{x-1} d\tau \\ dv = e^{-\tau} dt \Rightarrow & v = -e^{-\tau} \end{cases}$
$= 0 - 0 + x \int_0^{\infty} e^{-\tau}\tau^{x-1} \, d\tau = x\Gamma(x)$
ya que por el teorema de estricción y la regla de L'Hôpital
$\lim\limits_{\tau\to\infty} e^{-\tau}\tau^x = \lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{\tau^x}{e^{\tau}} = 0$ ■

Observaciones:

a).

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\Gamma(x)$	9.5	4.59	2.99	2.22	$\sqrt{\pi}$	1.49	1.30	1.16	1.07

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

b). Si $x = n$ entero positivo:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n(n-1)(n-2)\ldots 1\,\Gamma(1)$$

Pero $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^0\,d\tau = -e^{-\tau}|_0^\infty = -(0-1) = 1$

Luego,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Definición 5.4. *Si $x < 0$, definimos $\Gamma(x)$ así: $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ si $x \neq 0$ o $x \neq$ de un entero negativo. $\Gamma(x) = \pm\infty$ si $x = 0$ o $x =$ entero negativo.(Ver la gráfica 5.1)*

NOTA: la fórmula para calcular $\Gamma(x)$ para $x < 0$ es:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1)$$

En la figuta 5.1 se muestra la gráfica de la función $\Gamma(x)$.

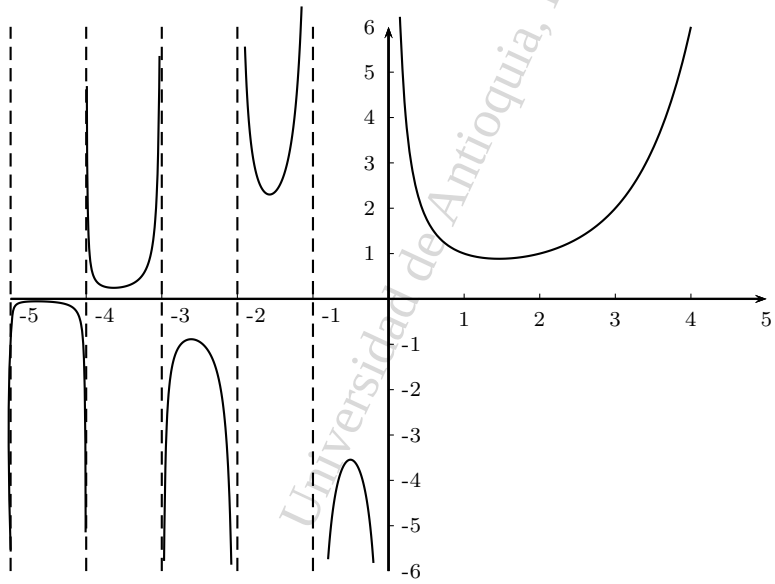


Figura 5.1

Ejemplo 10. $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejemplo 11. $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$
Solución:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) &= \left(-\frac{2}{7}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \\
&= \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Como $\Gamma(n+1) = n!$ para n entero positivo, generalizamos el factorial así:

Definición 5.5 (**Factorial generalizado**). $x! = \Gamma(x+1), \quad x \neq$ *entero negativo.*

Nota: con $n = 0$ obtenemos $0! = \Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1$ y

$$1! = \Gamma(1+1) = 1\,\Gamma(1) = 1 \times 1 = 1$$

con esto probamos, mediante la función Gamma, que $0! = 1 = 1!$

Ejemplo 12. Hallar $\left(\frac{7}{2}\right)!$

$$\left(\frac{7}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right) = \frac{7}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Ejemplo 13. Calcular $\left(-\frac{7}{2}\right)!$
Solución:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{7}{2}\right)! &= \Gamma\left(-\frac{7}{2}+1\right) = \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1. Hallar $\int_0^1 x^3 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^3 dx$
(**Rta:** $\frac{3!}{4^4}$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejercicio 2. Hallar $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$
(**Rta:** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

Ejercicio 3. Hallar utilizando la función Γ: $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$
(**Rta:** $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$)

Ejercicio 4. Probar que

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}$$

y

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

para todo entero n no negativo.

5.3.3. CASO III: $r_1 = r_2$

CASO III: $r_1 = r_2$. Tomamos como ejemplo para este caso, la E.D. de Bessel de orden cero.

Definición 5.6 (**Ecuación Diferencial de Bessel**). *La E.D.:*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0$$

donde p es un parámetro positivo, se le llama E.D. de Bessel de orden p.

Las soluciones de esta E.D. se les llama funciones de Bessel de orden p. Cuando $p = 0$ y $x \neq 0$ entonces

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Hallemos explícitamente estas soluciones en el intervalo $0 < x < R$; es fácil ver que $x = 0$ es un punto singular regular.
Suponemos una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r},$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

con $0 < x < R$ y $C_0 \neq 0$; derivamos dos veces y sustituimos en la E.D. y llegamos a esto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1} = 0$$

$$x^r\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 C_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1}\Big] = 0$$

para homogenizar los exponentes hagamos $k = n-1$ (o sea que $n = k+1$ y cuando $n = 0$ entonces $k = -1$) en la primera sumatoria y hagamos $k = n+1$ en la segunda sumatoria, luego

$$x^r\Big[\sum_{k=-1}^{\infty}(k+r+1)^2 C_{k+1} x^k + \sum_{n=1}^{\infty} C_{k-1} x^k\Big] = 0$$

$$x^r\Big[r^2 C_0 x^{-1} + (r+1)^2 C_1 x^0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+r+1)^2 C_{k+1} + C_{k-1}\right] x^k\Big] = 0$$

comparamos coeficientes

$$r^2 C_0 = 0, \quad (r+1)^2 C_1 = 0, \quad (k+r+1)^2 C_{k+1} + C_{k-1} = 0 \text{ con } k \geq 1$$

$$\text{Si } C_0 \neq 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r = 0$$

$$(0+1)^2 C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$C_{k+1} = -\frac{C_{k-1}}{(k+1)^2} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

iterando k

$$k = 1 \;\Rightarrow\; C_2 = -\frac{C_0}{(1+1)^2} = -\frac{C_0}{2^2}$$

$$k = 2 \;\Rightarrow\; C_3 = -\frac{C_1}{3^2} = 0$$

$$k = 3 \;\Rightarrow\; C_4 = -\frac{C_2}{4^2} = \frac{C_0}{2^2 \times 4^2}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$\begin{aligned} k=4 &\Rightarrow C_5=0 \\ k=5 &\Rightarrow C_6=-\frac{C_4}{6^2}=-\frac{C_0}{2^2\times 4^2\times 6^2} \end{aligned}$$

Generalizando,

$$\begin{aligned} C_{2n} &= (-1)^n\frac{C_0}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2}=(-1)^n\frac{C_0}{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))^2} \\ &= (-1)^n\frac{C_0}{(2^n\,1\cdot 2\cdot 3\ldots n)^2} \\ &= (-1)^n\frac{C_0}{2^{2n}\,(n!)^2},\quad n=0,1,2,\ldots \\ C_{2n+1} &= 0,\quad n=0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

Sustituimos en

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{C_0}{2^{2n}(n!)^2}\,x^{2n}=C_0\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right] \end{aligned}$$

Por definición, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=J_0(x)$$

se le llama función de Bessel de orden cero y de primera especie

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\frac{x^6}{2304}+\ldots$$

La segunda solución la hallamos por el método de reducción de orden D'Alembert:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= J_0(x)\int\frac{e^{-\int\frac{1}{x}\,dx}}{[J_0(x)]^2}\,dx=J_0(x)\int\frac{1}{x[J_0(x)]^2}\,dx \\ \text{como}\quad [J_0(x)]^2 &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{32}-\frac{5x^6}{576}+\ldots \\ &\Rightarrow \frac{1}{[J_0(x)]^2}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{32}+\frac{23x^6}{576}+\ldots \end{aligned}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \frac{1}{x[J_0(x)]^2} = \frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \frac{23x^5}{576} + \dots \\
y_2(x) &= J_0(x) \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \frac{23x^5}{576} + \dots \right) dx \\
&= J_0(x)[\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \dots]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= J_0(x)\ln x + \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \dots\right) \\
y_2 &= J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13824} - \dots
\end{aligned}$$

NOTA: observemos que

$$\frac{(-1)^2 1(1)}{2^2(1!)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$(-1)^3 \frac{1}{2^4(2!)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2^4\, 2^2\, 2} = \frac{-3}{128}$$

$$(-1)^4 \frac{1}{2^6(3!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{2^6\, 6^2\, 6} = \frac{11}{13824}$$

Por tanto

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^4(2!)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^6(3!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots$$

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^{2n} \tag{5.4}$$

Donde (5.4) es la segunda solución y es linealmente independiente con y_1. La solución general es:

$$y = C_0 J_0(x) + C_1 y_2(x)$$

En vez de $y_2(x)$ como segunda solución, se acostumbra tomar la siguiente función combinación lineal de y_2 y J_0, como segunda solución:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)]$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

donde γ es la constante de Euler; a $Y_0(x)$ se le llama función de Bessel de orden cero y de segunda especie y

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\approx 0{,}5772$$

Así $Y_0(x)$ será igual a

$$\begin{aligned} Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\Big[J_0(x)\ln x + \\ +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^{2n}+(\gamma-\ln 2)J_0(x)\Big] \end{aligned}$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\gamma+\ln\frac{x}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]$$

La solución general es: $y = C_1J_0(x)+C_2Y_0(x)$, las gráficas de $J_0(x)$ y $Y_0(x)$ se muestran en la figura 5.2

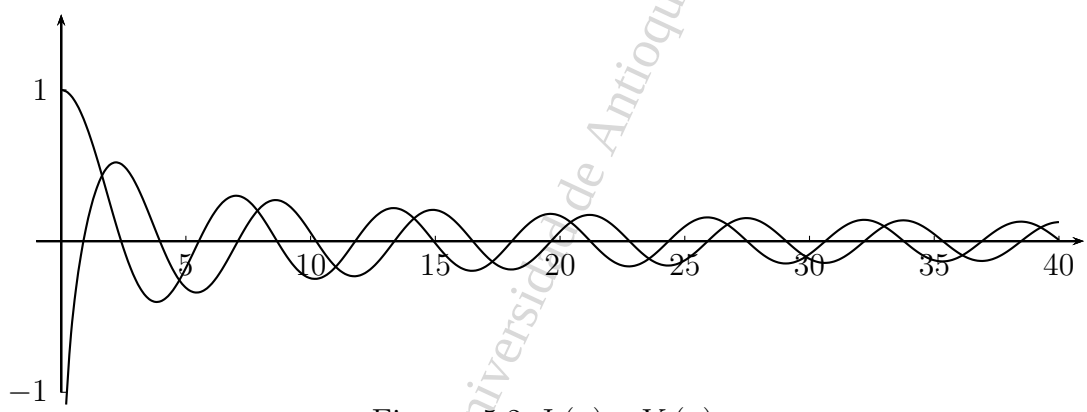


Figura 5.2 $J_0(x)$ y $Y_0(x)$.

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

5.3.4. ECUACIÓN DE BESSEL DE ORDEN p :

Sabemos que

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

se le llama E.D. de Bessel de orden $p\geq 0$ y $x>0$. Trabajemos con $p>0$ y veamos que $x=0$ es un punto singular regular. En efecto, como $x^2=0$

entonces $x = 0$ y

$$P(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2}$$

por tanto $x = 0$ es un punto singular regular; suponemos una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

con $C_0 \neq 0$ y $0 < x < R$; derivamos dos veces y sustituimos en la E.D., el resultado es:

$$x^r \left[(r^2 - p^2)C_0 x^0 + [(r+1)^2 - p^2]C_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+r)^2 - p^2]C_n + C_{n-2}\} x^n \right] = 0$$

Luego,

$$\begin{aligned} (r^2 - p^2)C_0 &= 0 \\ [(r+1)^2 - p^2]C_1 &= 0 \\ [(n+r)^2 - p^2]C_n + C_{n-2} &= 0 \quad \text{para } \ n \geq 2 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Si $C_0 \neq 0 \Rightarrow r^2 - p^2 = 0$ (ecuación indicial)

$$r = \pm p \Rightarrow r_1 = p \qquad r_2 = -p \text{ (índices de la singularidad)}$$

Si $r_1 = p \Rightarrow$ en la ecuación (5.5):

$$[(p+1)^2 - p^2]C_1 = 0$$

$(1 + 2p)C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$ ya que $\quad p > 0$

$$[(n+p)^2 - p^2]C_n + C_{n-2} = 0 \qquad n \geq 2$$

$$(n^2 + 2np)C_n + C_{n-2} = 0$$

$$n(n+2p)C_n + C_{n-2} = 0 \qquad n \geq 2$$

$$C_n = -\frac{C_{n-2}}{n(n+2p)}, \quad n \geq 2$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

por tanto todos los coeficientes impares son cero, ya que $C_1 = 0$.

Iteramos los pares con $n \geq 2$ y obtenemos:

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n\, C_0}{(2 \cdot 4 \ldots 2n)(2+2p)(4+2p)\ldots(2n+2p)},$$

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n\, C_0}{2^{2n}\; n!(1+p)(2+p)(3+p)\cdots(n+p)}; \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{5.6}$$

luego,

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+p} = x^p \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Así,

$$y_1(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} x^{2n}$$

Al reemplazar (5.6), obtenemos:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^p C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2^{2n}\; n!(1+p)(2+p)(3+p)\cdots(n+p)} \\ &= C_0\, 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\; x^{2n+p}}{2^{2n+p}\; n!(1+p)(2+p)(3+p)\cdots(n+p)} \\ &= K_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(1+p)(2+p)(3+p)\cdots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \end{aligned}$$

donde la constante $K_0 = C_0\, 2^p$.

Veamos los siguientes casos:

ⓐ Si p es un entero positivo:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= p! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!p!(1+p)(2+p)(3+p)\cdots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \\ &= p! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \end{aligned}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

a la expresión

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

se le llama **función de Bessel** de orden p y primera especie y se denota por $J_p(x)$.

ⓑ Si p es diferente de un entero positivo:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(1+p)(2+p)(3+p)\cdots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \\ &= \Gamma(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+1)(1+p)(2+p)\cdots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y como} \quad \Gamma(n+p+1) &= (n+p)\Gamma(n+p) \\ &= (n+p)(n+p-1)\Gamma(n+p-1) \\ &= (n+p)(n+p-1)\cdots(1+p)\Gamma(1+p) \\ \text{entonces} \quad y_1(x) &= \Gamma(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \end{aligned}$$

La expresión

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} = J_p(x)$$

se le llama **función de Bessel** de orden p y primera especie y se denota por $J_p(x)$, (Ver gráfica 5.3).

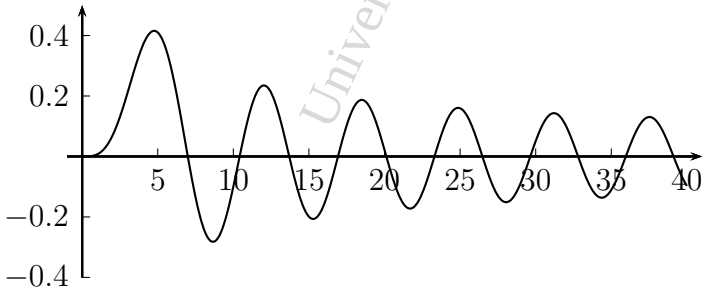


Figura 5.3 $J_{\frac{7}{2}}(x)$.

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

En general para $p =$ entero o $p \neq$ entero y $p > 0$

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

Para $r_2 = -p$, supongamos que $r_1 - r_2 = p - (-p) = 2p$ y $2p$ diferente de un entero positivo y $p > 0$.
La segunda solución es :

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} = J_{-p}(x)$$

que es la **función de Bessel** de orden $-p$

La solución general, $y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x)$ si $2p \neq$ entero positivo $p > 0$. También, si $2p =$ entero, pero $p \neq$ entero, entonces la solución general es $y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x)$

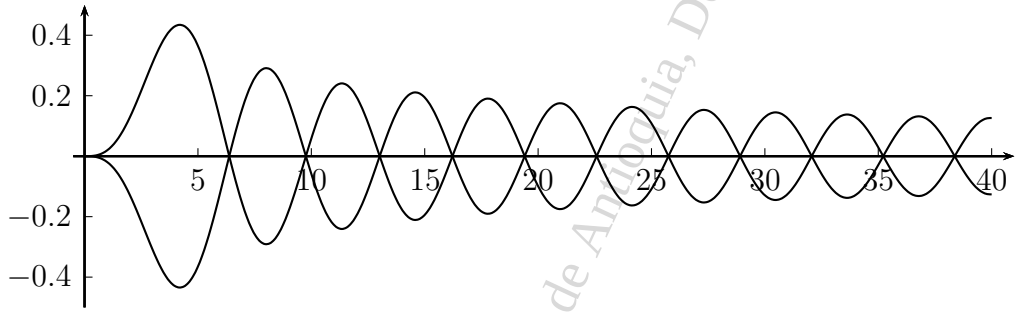


Figura 5.4 $J_3(x)$ y $J_{-3}(x)$.

Cuando $r_1 - r_2 = 2p =$ entero positivo (caso ii.) y p es un entero, entonces J_p y J_{-p} son linealmente dependientes (Ejercicio)(Ver figura 5.4 con $p = 3$, obsérvese que $J_{-3}(x) = -J_3(x)$, es decir son linealmente dependientes). En este caso la segunda solución es de la forma

$$y_2(x) = C J_p \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-p} \qquad C \neq 0$$

O también podemos usar el método de reducción de D'Alembert como hicimos con la función de Bessel de orden cero y segunda especie $Y_0(x)$.
Haciendo el mismo proceso, llegamos a $Y_p(x) =$ Bessel de orden p y segunda

Universidad de Antioquia, Depto de Matematicas

especie,

$$
\begin{aligned}
Y_p(x) &= \frac{2}{\pi}\left[\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)\,J_p(x)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\,\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n+p}\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{n!\,(n+p)!}\,\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Donde γ es la constante de Euler. La solución Y_p se le llama función de Bessel de orden p y segunda especie.

Solución general: $y = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x)$, donde p es un entero positivo.Ver gráfica 5.5 para $Y_p(x)$ con $p = 1$.

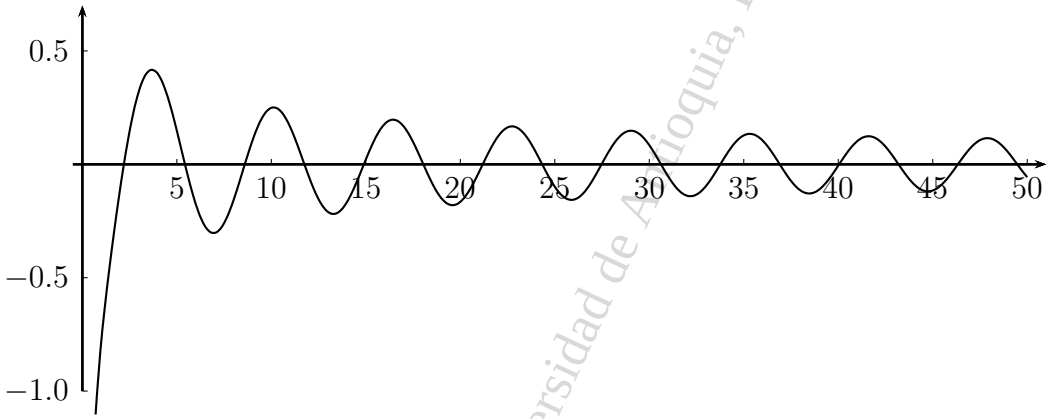


Figura 5.5 $Y_1(x)$

Las siguientes propiedades de la función de Bessel, se dejan como ejercicios.

Ejercicio 1. Mostrar que con el cambio de variable $y = \frac{u(x)}{\sqrt{x}}$ reduce la E.D. de Bessel de orden p a la E.D.:

$$u''(x) + \left[1 + \left(\frac{1}{4} - p^2\right)\,\frac{1}{x^2}\right]\,u = 0$$

Universidad de Antioquia, Depto de Matemáticas

Ejercicio 2. Con el resultado anterior, mostrar que la solución general de la E.D. de Bessel de orden $p = \frac{1}{2}$ es:

$$y = C_1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

Ejercicio 3. Sabiendo que

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Mostrar que

$$\frac{d}{dx}\left[x^p J_p(kx)\right] = kx^p J_{p-1}(kx)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p} J_p(kx)\right] = -kx^{-p} J_{p+1}(kx)$$

donde $k = cte$.

Ejercicio 4. Con los resultados del ejercicio anterior, mostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[J_p(kx)\right] &= kJ_{p-1}(kx) - \frac{p}{x} J_p(kx) \qquad (*) \\ \frac{d}{dx}\left[J_p(kx)\right] &= -kJ_{p+1}(kx) + \frac{p}{x} J_p(kx) \qquad (**) \end{aligned}$$

Y con esto mostrar que

$$\frac{d}{dx}\left[J_p(kx)\right] = \frac{k}{2}\left[J_{p-1}(kx) - J_{p+1}(kx)\right]$$

$$J_p(kx) = \frac{kx}{2p}\left[J_{p-1}(kx) + J_{p+1}(kx)\right]$$

Ejercicio 5. Hallar $J_1(x)$ y $\frac{d}{dx}J_1(x)$ en términos de $J_0(x)$ y $J_2(x)$. Hallar $J_{p+\frac{1}{2}}(x)$ en términos de $J_{p-\frac{1}{2}}(x)$ y $J_{p+\frac{3}{2}}(x)$.

Ejercicio 6. Probar que $\int J_1(x)\,dx = -J_0(x) + c$

Ejercicio 7. Probar que para p entero positivo:

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

i) Usando el ejercicio 4. y la aproximación

$$J_p(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2})$$

Probar que $\int_0^\infty J_{p+1}(x)\, dx = \int_0^\infty J_{p-1}(x)\, dx$.

ii) Sabiendo que $\int_0^\infty J_0(x)\ dx = 1$ (ver ejercicio 21. de la sección 6.4), mostrar que $\int_0^\infty J_p(x)\ dx = 1$

iii) $\int_0^\infty \left(\frac{J_p(x)}{x}\right) dx = \frac{1}{p}$

Ejercicio 8. Para $p = 0, 1, 2, \ldots$ mostrar que:

i) $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$

ii) $J_p(-x) = (-1)^p J_p(x)$

iii) $J_p(0) = 0, \quad p > 0$

iv) $J_0(0) = 1$

v) $\lim\limits_{x \to 0^+} Y_p(x) = -\infty$

Ejercicio 9. Comprobar que la E.D.

$$xy'' + (1 - 2p)y' + xy = 0$$

tiene la solución particular $y = x^p J_p(x)$
(Ayuda: hacer $u = x^{-p} y$)

Ejercicio 10. Con el cambio de variable $y = x^{-\frac{1}{2}} u(\lambda x)$, hallar la solución general de

$$x^2 y'' + 2xy' + \lambda^2 x^2 y = 0$$

(Rta.:$y = C_1 x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\lambda x) + C_2 x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(\lambda x)$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

5.3.5. PUNTO EN EL INFINITO

Para la E.D.: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, se desea saber el comportamiento de la solución en el infinito, para ello se hace el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$.
O sea que cuando $x \to \infty \Rightarrow t \to 0$.

Derivemos dos veces (usando la regla de la cadena) y sustituyamos en la E.D.:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}(-\frac{1}{x^2}) = -t^2\frac{dy}{dt} \\
y'' &= \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\frac{dt}{dx} = [-t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt}](-t^2) \\
y'' &+ \Big[\frac{2}{t} - \frac{P(\frac{1}{t})}{t^2}\Big]y' + \frac{Q(\frac{1}{t})}{t^4} = 0
\end{aligned}
$$

Si $t = 0$ es punto ordinario entonces x en el infinito es un punto ordinario.
Si $t = 0$ es un punto singular regular con exponentes de singularidad r_1, r_2 entonces x en el infinito es un punto singular regular con exponentes de singularidad r_1, r_2.
Si $t = 0$ es un punto singular irregular entonces x en el infinito es un punto singular irregular.

Ejemplo 14. Análizar los puntos en el infinito para la E.D. de Euler:

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$

Solución: haciendo el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ queda transformada en la E.D.:

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0$$

Por lo tanto $t = 0$ es un punto singular regular y la ecuación indicial es $r(r-1) - 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 1$, por lo tanto x en el infinito es un punto singular regular con exponentes 2 y 1.

Para los ejercicios siguientes, decir si la E.D. tiene un punto singular regular o irregular en el infinito:

1). $x^2y'' - 4y = 0$
(**Rta.:** hay un punto singular regular en el infinito)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

2). $x^3y'' + 2x^2y' + 3y = 0$
(**Rta.:** hay un punto singular regular en el infinito)

Para los ejercicios siguientes hallar las raíces indiciales y las dos soluciones en serie de Frobenius, linealmente independientes con $|x| > 0$.

1). $4xy'' + 2y' + y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = \cos\sqrt{x}, \quad y_2 = \operatorname{sen}\sqrt{x}$)

2). $xy'' + 2y' + 9xy = 0$
(**Rta.:** $y_1 = \frac{\cos 3x}{x}, \quad y_2 = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$)

3). $xy'' + 2y' - 4xy = 0$
(**Rta.:** $y_1 = \frac{\cosh 2x}{x}, \quad y_2 = \frac{\operatorname{senh} 2x}{x}$)

4). $xy'' - y' + 4x^3y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = \cos x^2, \quad y_2 = \operatorname{sen} x^2$)

5). $4x^2y'' - 4xy' + (3 - 4x^2)y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = \sqrt{x}\cosh x, \quad y_2 = \sqrt{x}\operatorname{senh} x$)

6). $2xy'' + 3y' - y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)},\ y_2 = x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)})$$

7). $2xy'' - y' - y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = x^{\frac{3}{2}}(1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!5\cdot 7\ldots(2n+3)}),\ y_2 = 1-x-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)})$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

8). $3xy'' + 2y' + 2y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = x^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!4 \cdot 7 \ldots (3n+1)} x^n, \; y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!2 \cdot 5 \ldots (3n-1)} x^n)$$

9). $2x^2y'' + xy' - (1 + 2x^2)y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = x(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!7 \cdot 11 \ldots (4n+3)}), \; y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!1 \cdot 5 \ldots (4n+1)})$$

10). $2x^2y'' + xy' - (3 - 2x^2)y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{\frac{3}{2}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!9 \cdot 13 \ldots (4n+5)} x^{2n})$,

$$y_2 = x^{-1}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!3 \cdot 7 \ldots (4n-5)} x^{2n}))$$

11). $6x^2y'' + 7xy' - (x^2 + 2)y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{\frac{1}{2}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n! 19 \cdot 31 \ldots (12n+7)})$,

$$y_2 = x^{-\frac{2}{3}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n! 5 \cdot 17 \ldots (12n-7)}))$$

12). $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{\frac{1}{3}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! 7 \cdot 13 \ldots (6n+1)} x^{2n})$,

$$y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! 5 \cdot 11 \ldots (6n-1)} x^{2n})$$

13). $2xy'' + (1 + x)y' + y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} x^n = x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, \; y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)} x^n)$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

14). $2xy'' + (1-2x^2)y' - 4xy = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!2^n} = x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}},\ y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3 \cdot 7 \ldots (4n-1)} x^{2n})$$

15). $xy'' + (3-x)y' - y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{-2}(1+x),\ y_2 = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$)

16). $xy'' + (5-x)y' - y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{-4}(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}),\ y_2 = 1 + 24\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+4)!}$)

17). $xy'' + (x-6)y' - 3y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{120}x^3,\ y_2 = x^7(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{n! 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdots (n+7)} x^n))$$

18). $5xy'' + (30+3x)y' + 3y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{-5}(1 - \frac{3}{5}x + \frac{9}{50}x^2 - \frac{9}{250}x^3 + \frac{27}{5000}x^4)$,
$y_2 = 1 + 120\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(n+5)! 5^n} x^n$)

19). $xy'' - (4+x)y' + 3y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = 1 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3,\ y_2 = x^5(1 + 120\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+5)!} x^n)$)

20). $x^2y'' + (2x+3x^2)y' - 2y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{-2}(2 - 6x + 9x^2),\ y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{(n+2)!} x^n$)

21). $x(1-x)y'' - 3y' + 2y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = 3 + 2x + x^2,\ y_2 = \frac{x^4}{(1-x)^2}$)

22). $xy'' + 2y' - xy = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\cosh x}{x},\ y_2 = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\operatorname{senh} x}{x}$)

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

23). $x(x-1)y'' + 3y' - 2y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2,\ y_2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+4}$)

24). $xy'' + (1-x)y' - y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x,\ y_2 = y_1(x)\ln|x| + y_1(x)(-x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3\cdot 3!}x^3 + \frac{1}{4\cdot 4!}x^4 - \ldots))$

25). $xy'' + y' + y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}x^n,\ y_2 = y_1(x)\ln|x| + y_1(x)(2x + \frac{5}{4}x^2 + \frac{23}{27}x^3 + \ldots))$$

26). $x^2y'' + x(x-1)y' + y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = xe^{-x},\ \ y_2 = xe^{-x}(\ln|x| + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3\cdot 3!}x^3 + \ldots))$

27). $xy'' + (x-1)y' - 2y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = x^2,\ \ y_2 = \frac{1}{2}x^2\ln|x| - \frac{1}{2} + x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots)$

28). $xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = e^x,\ \ y_2 = e^x\ln|x|$)

29). $y'' + \frac{6}{x}y' + (\frac{6}{x^2} - 1)y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \frac{\operatorname{senh} x}{x^3},\ \ y_2 = \frac{\cosh x}{x^3}$)

30). $y'' + \frac{3}{x}y' + 4x^2y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2},\ \ y_2 = \frac{\cos x^2}{x^2}$)

31). $y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = x,\ \ y_2 = \frac{1}{x^2}$)

32). $xy'' + 2y' + xy = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},\ \ y_2 = \frac{\cos x}{x}$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

33). $xy'' + (1-2x)y' - (1-x)y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = e^x, \;\; y_2 = e^x \ln|x|$)

34). $y'' - 2y' + (1 + \frac{1}{4x^2})y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \sqrt{x}\, e^x, \;\; y_2 = \sqrt{x}\, e^x \ln|x|$)

35). $x(x-1)y'' - (1-3x)y' + y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \frac{1}{1-x}, \;\; y_2 = \frac{\ln|x|}{1-x}$)

36). $y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2\cdot 4)^2} + \ldots, \;\; y_2 = \ln|x| y_1 - (\frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{8\cdot 16} + \ldots))$

37). $y'' + \frac{x+1}{2x}y' + \frac{3}{2x}y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \sqrt{x}\,(1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 + \ldots), \;\; y_2 = 1 - 3x + 2x^2 + \ldots)$

38). $x^2y'' + x(x-1)y' - (x-1)y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = x, \;\; y_2 = x\ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n} x^{n+1}$)

39). $xy'' - x^2y' + (x^2-2)y = 0$ con $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$
(**Rta:** $y = xe^x$)

40). La ecuación hipergeométrica de Gauss es

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)]y' - \alpha\beta y = 0$$

donde $\alpha, \;\; \beta, \;\; \gamma$ son constantes

a). Mostrar que $x = 0$ es un punto singular regular con exponente de singularidad 0 y $1-\gamma$.

b). Si γ es un entero positivo, mostrar que

$$y(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

con $C_0 \neq 0$, cuya relación de recurrencia es:

$$C_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)} C_n$$

para $n \geq 0$

c). Si $C_0 = 1$ entonces

$$y(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_n}{n! \gamma_n} x^n$$

donde $\alpha_n = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)$ para $n \geq 1$ y similarmente se definen β_n y γ_n.

d). La serie en c) se le llama serie hipergeométrica y se denota por $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Demostrar que:

1) $F(1,1,1,x) = \frac{1}{1-x}$ (la serie geométrica)
2) $xF(1,1,2,-x) = \ln(1+x)$
3) $xF(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x^2) = \tan^{-1} x$
4) $F(-k,1,1,-x) = (1+x)^k$ (la serie binomial).

5.4. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Ejemplo 15. Resolver la E.D. del Ejemplo 5. $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0$

```
>Eqn1:={(x^2-1)*D(D(y))(x)+4*x*D(y)(x)+2*y(x)=0,D(y)(0)=C1,y(0)=C0};
```

$Eqn1 :=$
$\{(x^2-1)*D(D(y))(x)+4*x*D(y)(x)+2*y(x) = 0, D(y)(0) = C1, y(0) = C0\}$

```
>Order:=8:
>Sol1:=dsolve(Eqn1,y(x),series);
```

$Sol1 := y(x) = C0+C1x+C0x^2+C1x^3+C0x^4+C1x^5+C0x^6+C1x^7+O(x^8)$

Ejemplo 16. Para el ejemplo anterior, hallar la relación de recurrencia, iterarla hasta $n = 8$ y luego dar la solución.
Debemos cambiar el formato de entrada de la E.D.

Universidad de Antioquia. Depto. de Matematicas

```
>eqn2:=(x^2-1)*diff(y(x),x,x)+4*x*diff(y(x),x)+2*y(x)=0;
```

$$> eqn2 := (x^2-1)*diff(y(x),x,x)+4*x*diff(y(x),x)+2*y(x)=0$$

```
>SeriesSol:=sum(a[n]*x^n,n=k-2..k+2);
```

$SeriesSol := a[k-2]x^{(k-2)} + a[-1+k]x^{(-1+k)} + a[k]x^k + a[1+k]x^{(1+k)} + a[k+2]x^{(k+2)}$

```
>simplify(simplify(subs(y(x)=SeriesSol,eqn2)));
```

$-(-5a[k-2]x^{(k-2)}k + 3a[k+2]x^{(k+2)}k - a[k]x^k k + a[1+k]x^{(1+k)}k - x^k a[k-2]k^2 - x^{(1+k)}a[-1+k]k$
$-3a[-1+k]x^{(-1+k)}k - 3x^{(k+2)}a[k]k + x^k a[k]k^2 + x^{(k+2)}a[k+2]k^2 + 2a[-1+k]x^{(-1+k)}$
$+6a[k-2]x^{(k-2)} + x^{(k-2)}a[k-2]k^2 + x^{(-1+k)}a[-1+k]k^2 + 2a[k+2]x^{(k+2)} - x^{(1+k)}a[-1+k]k^2$
$-7x^{(k+2)}a[k+2]k + x^{(1+k)}a[1+k]k^2 + x^k a[k-2]k - x^{(k+2)}a[k]k^2 - 5x^{(k+3)}a[1+k]k$
$-x^{(k+3)}a[1+k]k^2 - x^{(k+4)}a[k+2]k^2 - 2a[k]x^{(k+2)} - 6a[1+k]x^{(k+3)} - 12a[k+2]x^{(k+2)})/x^2 = 0$

```
>a[k+2]:=simplify(solve(coeff(lhs(%),x^(k+2)),a[k+2]));
```

$$a[k+2] := a[k]$$

```
>a[0]:=C0:a[1]:=C1:
> for k from 2 to 8 do a[k]:=a[k-2] od:
> Sol2:=sum(a[j]*x^j,j=0..8);
```

$$Sol2 := C0 + C1x + C0x^2 + C1x^3 + C0x^4 + C1x^5 + C0x^6 + C1x^7 + C0x^8$$

```
>Y1:=C0*sum('x^(2*k)',k=0..infinity);
```

$$Y1 := -\frac{C0}{x^2-1}$$

```
>Y2:=C1*sum('x*x^(2*k)',k=0..infinity);
```

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$Y2 := -\frac{C1x}{x^2 - 1}$$

Ejemplo 17. Las siguientes instrucciones grafican las funciones de Bessel de primera especie y segunda especie.

```
>plot(BesselJ(3,x),x=0..50,y=-0.5..0.5);
>plot(BesselY(1,x),x=.1..50,y=-1..0.5);
```

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

CAPÍTULO 6

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

6.1. INTRODUCCION

Definición 6.1. *Sea $f(t)$ una función definida para todo $t \geq 0$; se define la* **Transformada de Laplace** *de $f(t)$ así:*

$$\begin{aligned} \pounds\{f(t)\}(s) = F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)dt, \end{aligned}$$

si el límite existe.

Teorema 6.1.

Si $f(t)$ es una función continua a tramos para $t \geq 0$ y además $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t \geq T$, donde M es constante , $c > 0$ constante y $T > 0$ constante, entonces $\pounds\{f(t)\}(s)$ existe para $s > c$.

Demostración: veamos que la siguiente integral existe, en efecto:

$$\begin{aligned} |\pounds\{f(t)\}(s)| &= \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \leq \int_0^\infty |e^{-st}||f(t)|dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt, \qquad \text{sabiendo que } e^{-st} > 0 \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\int_0^T e^{-st}|f(t)|dt}_{I_1} + \underbrace{\int_T^\infty e^{-st}|f(t)|dt}_{I_2}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T e^{-st}|f(t)|dt \quad \text{existe, ya que } f \text{ es continua a tramos} \\
I_2 &= \int_T^\infty e^{-st} \underbrace{|f(t)|}_{\leq Me^{ct}} dt \leq \int_T^\infty e^{-st} M e^{ct} dt = M \int_T^\infty e^{(-s+c)t}\, dt \\
&= \frac{M}{-(s-c)}\, e^{-(s-c)t}\Big|_T^\infty, \text{ suponiendo que } s-c>0 \\
&= -\frac{M}{s-c}(0 - e^{-(s-c)T}) = \frac{M}{s-c}\, e^{-(s-c)T}
\end{aligned}$$

Luego, $\pounds\{f(t)\}(s)$ existe, si $s > c$. ■

NOTA: a) cuando $f(t) \leq |f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t \geq T$, entonces decimos que $f(t)$ es de orden exponencial (ver figura 6.1).

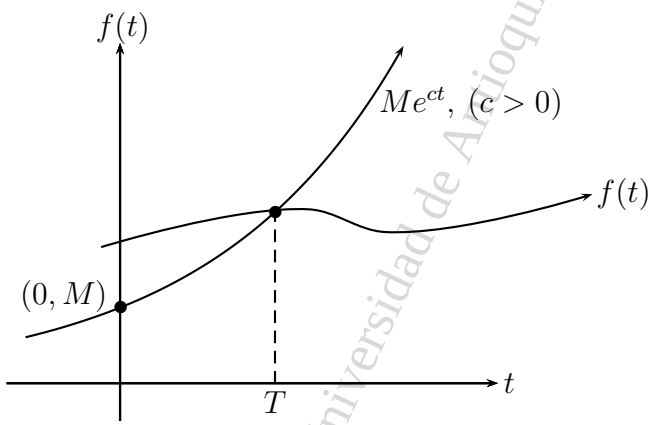


Figura 6.1

b) Si $f(t)$ es de orden exponencial, es decir, $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t \geq T$ y c, M constantes, entonces

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0, \;\; s > c$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

En efecto, como $|f(t)| \leq Me^{ct}$, entonces $|e^{-st}f(t)| \leq Me^{-(s-c)t}$ y como $\lim_{t\to\infty} e^{-(s-c)t} = 0$, si $s > c$, entonces por el teorema de estricción en límites, se concluye que

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-st}f(t)| = 0, \ \ s > c,$$

luego

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) = 0, \ \ s > c$$

Observación: $\pounds$ es un operador lineal, en efecto

$$\begin{aligned}
\pounds\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) &\overset{def.}{=} \int_0^\infty e^{-st}\,(\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt \\
&= \alpha \int_0^\infty e^{-st}\,f(t)\,dt + \beta \int_0^\infty e^{-st}\,g(t)\,dt \\
&= \alpha \pounds\{f(t)\}(s) + \beta \pounds\{g(t)\}(s)
\end{aligned}$$

Teorema 6.2.

1). $\pounds\{1\}(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$, $\pounds\{k\}(s) = \frac{k}{s}$, $s > 0$, k *constante.*

2). $\pounds\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0,\ n = 1, 2, \ldots$

3). $\pounds\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$, *para* $s > a$

4). $\pounds\{\operatorname{sen} kt\}(s) = \frac{k}{s^2+k^2}$, $s > 0$

5). $\pounds\{\cos kt\}(s) = \frac{s}{s^2+k^2}$, $s > 0$

6). $\pounds\{\operatorname{senh} kt\}(s) = \frac{k}{s^2-k^2}$, $s > |k|$

7). $\pounds\{\cosh kt\}(s) = \frac{s}{s^2-k^2}$, $s > |k|$

8). $\pounds\{t^n\, e^{at}\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a,\ n = 1, 2, \ldots$

Demostración: 1). Si $s > 0$ se tiene que

$$\pounds\{1\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,1\,dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

2). Hagamos la demostración por el método de inducción. Para ello, suponemos

Universidad de Antioquia, Depto de Matematicas

que $s > 0$ y utilizamos el siguiente limite: $\lim\limits_{t\to\infty} |\frac{t^n}{e^{ct}}| = 0, n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} n = 1 : \mathcal{L}\{t\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, t\, dt, \quad \text{hagamos} \begin{cases} u = t & \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-st}\, dt & \Rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{cases} \\ &= -\frac{te^{-st}}{s}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\}(s) &= -(0-0) + \frac{1}{s}\,\frac{1}{-s}\, e^{-st}\Big|_0^\infty \\ &= -\frac{1}{s^2}(0-1) = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n-1$ y veamos que se cumple para n. En efecto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^n\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, t^n\, dt \ \text{ hagamos} \begin{cases} u = t^n & \Rightarrow du = nt^{n-1}\, dt \\ dv = e^{-st}\, dt & \Rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{cases} \\ &= -\frac{t^n\, e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty + \frac{n}{s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1}\, dt}_{\mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s)} \\ &= -(0-0) + \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s) = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s) \end{aligned}$$

Pero por la hipótesis de inducción $\mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s) = \frac{(n-1)!}{s^n}$, luego:

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n}{s}\frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

4). Por el método de los operadores inversos, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\,(\operatorname{sen} kt)\, dt \\ &= \frac{1}{D}\, e^{-st} \operatorname{sen} kt\Big|_0^\infty = e^{-st}\,\frac{1}{D-s}\, \operatorname{sen} kt\Big|_0^\infty \end{aligned}$$

$$= e^{-st}\,\frac{D+s}{D^2-s^2}\, \operatorname{sen} kt\Big|_0^\infty = e^{-st}\,\frac{D+s}{-k^2-s^2}\, \operatorname{sen} kt\Big|_0^\infty$$

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{s^2+k^2}\, e^{-st}(k\cos kt + s\,\mathrm{sen}\, kt)\Big|_0^\infty \\
&= -\frac{1}{s^2+k^2}\,(0-k) = \frac{k}{s^2+k^2}, \quad s>0
\end{aligned}
$$

En la demostración anterior utilizamos el siguiente teorema de límites: si $\lim\limits_{t\to\infty} |f(t)| = 0$ y $g(t)$ es una función acotada en $\mathbb{R}$ entonces $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)g(t) = 0$. ■

6.2. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Si $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, entonces decimos que $f(t)$ es una transformada inversa de Laplace de $F(s)$ y se denota así:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

NOTA:

- La transformada inversa de Laplace de $F(s)$, no necesariamente es única.
  Por ejemplo la función

  $$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0 \text{ y } t \neq 1,\ t \neq 2 \\ 3, & \text{si } t = 1 \\ -3, & \text{si } t = 2 \end{cases}$$

  y la función $g(t) = 1$ (obsérvese que $f(t) \neq g(t)$) tienen la misma transformada, es decir, $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}$. Sinembargo $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = f(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = g(t)$ son diferentes.
  Pero cuando $f(t)$ y $g(t)$ son continuas para $t \geq 0$ y $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$ entonces $f(t) = g(t)$ (Ver el libro de Variable Compleja de Churchill)

- Para funciones continuas, $\mathcal{L}^{-1}$ es un operador lineal:

  $$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta\, G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

- En los ejemplos de esta sección, utilizaremos los resultados del Apéndice C. para calcular fracciones parciales.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Teorema 6.3. *Para a y k constantes se tiene:*

1). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1,\ y \quad \pounds^{-1}\left\{\dfrac{k}{s}\right\} = k\ ,\ si\ \ s > 0$

2). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n\ y \quad \pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{n+1}}\right\} = \dfrac{t^n}{n!}\ ,\ si\ \ s > 0$

3). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}\ ,\ si\ \ s > a$

4). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2+k^2}\right\} = \operatorname{sen} kt,\ y \quad \pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+k^2}\right\} = \dfrac{\operatorname{sen} kt}{k}\ ,\ si\ \ s > 0$

5). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos kt\ ,\ si\ \ s > 0$

6). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2-k^2}\right\} = \operatorname{senh} kt\ y \quad \pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-k^2}\right\} = \dfrac{\operatorname{senh} kt}{k}\ ,\ si\ \ s > |k|$

7). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-k^2}\right\} = \cosh kt\ ,\ si\ \ s > |k|$

8). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\} = t^n\, e^{at}\ y\ \pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-a)^{n+1}}\right\} = \dfrac{t^n\, e^{at}}{n!}\ ,\ si\ \ s > a$

Ejemplo 1. Con factores lineales en el denominador

$$\begin{aligned}
\pounds^{-1}\left\{\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\right\} &= \pounds^{-1}\left\{\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-1}\right\} \\
&= A\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + B\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + C\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} \\
&= Ae^{3t} + Be^{-2t} + Ce^{t}
\end{aligned}$$

Pero por fracciones parciales

$$\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-1}$$

Para hallar el coeficiente A, eliminamos de la fracción el factor correspondiente a A y en la parte restante sustituimos a s por la raíz asociada a este factor; lo mismo hacemos para los coeficientes B y C.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

$$A = \frac{7\,(3) - 1}{(5)\,(2)} = 2\ ,\ B = \frac{7\,(-2) - 1}{(-5)\,(-3)} = -1\ ,\ C = \frac{7\,(1) - 1}{(-2)\,(3)} = -1,$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\right\} = 2e^{3t} - e^{-2t} - e^{t}$$

Ejemplo 2. Con factores lineales repetidos

$$\begin{aligned}
\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\} &= \pounds^{-1}\left\{\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{(s+2)^3} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{s+2}\right\} \\
&= A\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + B\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + C\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\} + \\
&\quad + D\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} + E\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\
&= A\,t + B\,(1) + C\,\frac{t^2\,e^{-2t}}{2!} + D\,\frac{t\,e^{-2t}}{1!} + E\,e^{-2t} \\
\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} &= \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{(s+2)^3} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{s+2}
\end{aligned}$$

y por los métodos de las fracciones parciales hallamos

$A = \frac{1}{8},\ \ B = -\frac{1}{16},\ \ C = -\frac{1}{4},\ \ D = 0,\ \ E = \frac{1}{8}$, luego

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\} = \frac{1}{8}\,t - \frac{1}{16} - \frac{1}{4}\,\frac{t^2\,e^{-2t}}{2!} + \frac{1}{8}\,e^{-2t}$$

Ejemplo 3. Factores cuadráticos, lo factorizamos en factores lineales en los complejos

$$\begin{aligned}
\pounds^{-1}\left\{\frac{s^2+2}{s(s^2+2s+2)}\right\} &= \pounds^{-1}\left\{\frac{s^2+2}{s(s-(-1+i))(s-(-1-i))}\right\} \\
&= \pounds^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s-(-1+i)} + \frac{C}{s-(-1-i)}\right\}
\end{aligned}$$

$$= A\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + B\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-1+i)}\right\} + C\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-1-i)}\right\}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$
\begin{aligned}
&= A\,(1) + B\,e^{(-1+i)t} + Ce^{(-1-i)t} \\
&= A + Be^{-t}(\cos t + i \operatorname{sen} t) + C\,e^{-t}(\cos t - i \operatorname{sen} t) \\
&= A + e^{-t}[(B+C)\cos t + i(B-C)\operatorname{sen} t]
\end{aligned}
$$

Hallamos los coeficientes de la misma manera que en ejemplo 1.

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{0^2+2}{[0-(-1+i)][0-(-1-i)]} = \frac{2}{1+1} = 1 \\
B &= \frac{(-1+i)^2+2}{(-1+i)[-1+i-(-1-i)]} = -\frac{1}{i} = i \\
C &= \frac{(-1-i)^2+2}{(-1-i)[-1-i-(-1+i)]} = \frac{1}{i} = -i \\
\pounds^{-1}\left\{\frac{s^2+2}{s(s^2+2s+2)}\right\} &= 1 + e^{-t}(0\cos t + i(2i)\operatorname{sen} t) \\
&= 1 - 2e^{-t}\operatorname{sen} t
\end{aligned}
$$

6.3. TEOREMAS SOBRE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Los teoremas que veremos en esta sección nos permitirán en muchos casos calcular la transformada inversa sin utilizar fracciones parciales.

Teorema 6.4.

Si f es una función continua a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial para $t \geq T$, entonces

$$\lim_{s\to\infty} \pounds\{f(t)\}(s) = \lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

Demostración: como la función f es continua a tramos en $[0,T]$, entonces es acotada en este intervalo y por tanto $\exists M_1 > 0$ tal que $|f(t)| \leq M_1\,e^{0t}$, $\forall t \in [0,T]$ y como $f(t)$ es de orden exponencial para $t \geq T$, entonces $|f(t)| \leq M_2\,e^{\gamma t}$ donde M_2 y γ son constantes con $M_2 \geq 0$.
Sea $M = \text{máx}\{M_1, M_2\}$ y sea $\alpha = \text{máx}\{0,\gamma\}$; por lo tanto, $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, $\forall t \geq 0$.

$$|F(s)| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-st}\,|f(t)|\,dt \leq \int_0^\infty e^{-st}\,Me^{\alpha t}\,dt$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

$$
\begin{aligned}
&= M\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\,dt = \frac{1}{-(s-\alpha)}\,e^{-(s-\alpha)}\Big|_0^\infty \\
&\overset{s\geq\alpha}{=} -\frac{M}{s-\alpha}\,(0-1) = \frac{M}{s-\alpha} \\
&\Rightarrow \lim_{s\to\infty}|F(s)| \leq \lim_{s\to\infty}\frac{M}{s-\alpha} = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{s\to\infty} F(s) = 0
\end{aligned}
$$

■

Teorema 6.5 (**Primer Teorema de Translación**).

Si a es un número real cualquiera, entonces

$$
\begin{aligned}
\pounds\left\{e^{at}\,f(t)\right\}(s) &= \pounds\left\{f(t)\right\}(s-a) \\
&= F(s-a)
\end{aligned}
$$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\pounds\{e^{at}\,f(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\,e^{at}\,f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,f(t)\,dt \\
&= \pounds\{f(t)\}(s-a) = F(s-a) \quad ■
\end{aligned}
$$

NOTA: $\pounds^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}\,f(t)$

Ejemplo 4. $\pounds\{e^{2t}\,\operatorname{sen} t\}(s)$
<u>Solución</u>: $\pounds\{e^{2t}\,\operatorname{sen} t\}(s) = \pounds\{\operatorname{sen} t\}(s-2) = \frac{1}{(s-2)^2+1}$
ya que $\quad \pounds\{\operatorname{sen} t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$

Ejemplo 5. $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+3}\right\}$
<u>Solución</u>:

$$
\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+3}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^t\,\operatorname{sen}\sqrt{2}t
$$

Ejemplo 6. $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\}$
<u>Solución</u>:

$$
\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2+1}\right\}
$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$= \pounds^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} - 2\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} = e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\,\operatorname{sen} t$$

Definición 6.2 (Función Escalón Unitario)**.** (Ver figura 6.2)

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \le t < a, \\ 1, & \text{si} \quad t \ge a \end{cases}$$

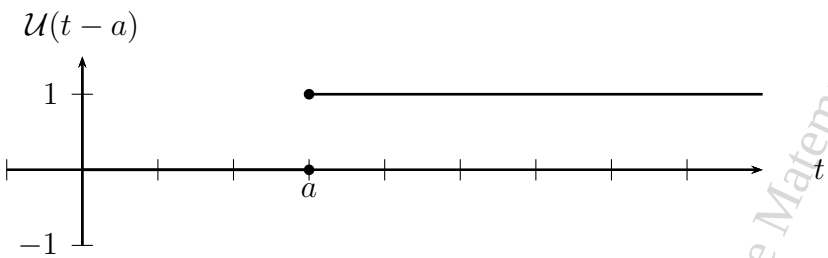


Figura 6.2

Ejemplo 7. Al aplicar $\mathcal{U}(t-\pi)$ a la función $\operatorname{sen} t$ trunca la función $\operatorname{sen} t$ entre 0 y π quedando la función $g(t) = \mathcal{U}(t-\pi)\operatorname{sen} t$ como lo muestra la gráfica 6.3

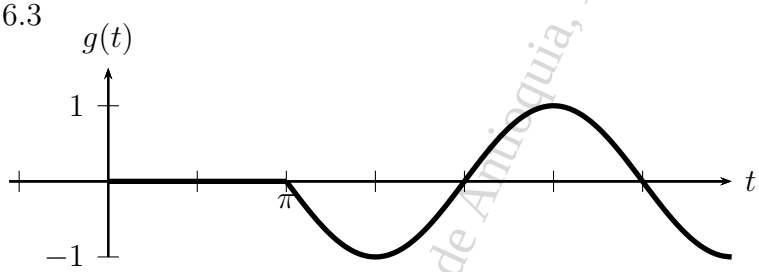


Figura 6.3

Teorema 6.6 (**Segundo Teorema de Translación**)**.**

Si $a > 0$ y $f(t)$ es continua para $t \ge 0$ y de orden exponencial entonces

$$\pounds\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s) = e^{-as}\pounds\{f(t)\}(s)$$

Demostración:

$$\pounds\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\,dt =$$

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

$$= \int_0^a e^{-st}\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\,dt$$
$$= \int_0^a e^{-st}0f(t-a)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}1f(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt$$

Hagamos $u = t-a \Rightarrow du = dt$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\pounds\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)\,du \\ &= e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du \\ &= e^{-as}\pounds\{f(t)\}(s)\end{aligned}$$ ■

NOTA: forma recíproca

$$\pounds^{-1}\{e^{-as}\,F(s)\} = \mathcal{U}(t-a)f(t-a)$$

Ejemplo 8. Hallar $\pounds\{\mathcal{U}(t-a)\}$

$$\pounds\{\mathcal{U}(t-a)\} = \pounds\{\mathcal{U}(t-a)\,1\} = e^{-as}\frac{1}{s} = \frac{e^{-as}}{s}$$

Ejemplo 9. Hallar $\pounds\{\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2})\,\operatorname{sen} t\}$
<u>Solución</u>:

$$\pounds\left\{\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\,\operatorname{sen} t\right\} = \pounds\left\{\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\,\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

pero

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\pounds\left\{\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\pounds\{\cos t\} = e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\frac{s}{s^2+1}$$

Ejemplo 10. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}$
<u>Solución</u>:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\} = \pounds^{-1}\left\{e^{-s}\,\frac{1}{s(s+1)}\right\}$$

Universidad de Antioquia. Depto. de Matematicas

como

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow\ A=1,\ B=-1\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\,\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\,\frac{1}{s+1}\right\}\\ &= \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-1)\,e^{-(t-1)}\end{aligned}$$

Teorema 6.7 (**Derivada de una Transformada**).

$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad con\, n = 1, 2, \ldots,$
$donde\ F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

Demostración: por inducción sobre n.

$n = 1 \qquad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

$$\begin{aligned}\frac{dF(s)}{ds} &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st} f(t)\right)dt\\ &= \int_0^\infty -t\,e^{-st} f(t)\,dt = -\int_0^\infty e^{-st}(t\,f(t))\,dt\\ &\overset{\text{def.}\mathcal{L}}{=} -\mathcal{L}\{t\,f(t)\}(s)\\ \Rightarrow \mathcal{L}\{t\,f(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}F(s)\end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n = k$

$$\mathcal{L}\{t^k f(t)\}(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s)$$

Veamos que se cumple para $n = k+1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^{k+1} f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t\,t^k f(t)\}(s) \overset{n=1}{=} -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t^k f(t)\}(s)\\ &\overset{n=k}{=} -\frac{d}{ds}[(-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s)]\\ &= (-1)^{k+1}\frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}} F(s)\end{aligned}$$

■

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

NOTA: para el caso $n = 1$, obtenemos una fórmula que nos permite hallar la transformada inversa de transformadas que no tenemos en la tabla de transformadas.

$$\pounds\{t\,f(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}\,F(s)$$

o sea que

$$\begin{aligned} t\,f(t) &= -\pounds^{-1}\{F'(s)\} \\ f(t) &= -\frac{1}{t}\pounds^{-1}\{F'(s)\} \end{aligned}$$

Ejemplo 11. Hallar $f(t)$ para
a)$\pounds^{-1}\left\{\ln\frac{s-3}{s+1}\right\} = f(t)$, b)$\pounds^{-1}\left\{\ln(1+\frac{1}{s^2})\right\} = f(t)$
<u>Solución</u>: a)

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\,F(s)\right\} = -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\,\ln\,\frac{s-3}{s+1}\right\} \\ &= -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s-3}\,\frac{(s+1)1-(s-3)1}{(s+1)^2}\right\} \\ &= -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s-3}\,\frac{4}{(s+1)^2}\right\} = -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{4}{(s-3)(s+1)}\right\} \\ &= -\frac{4}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right\} \end{aligned}$$

utilizando fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-3)(s+1)} &= \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4} \\ f(t) &= -\frac{4}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{4(s-3)} - \frac{1}{4(s+1)}\right\} \\ &= -\frac{1}{t}\,(e^{3t} - e^{-t}) = \frac{e^{-t} - e^{3t}}{t} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\,F(s)\right\} = -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\,\ln(1+\frac{1}{s^2})\right\} \\ &= -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{s^2}}\,\left(-\frac{2}{s^3}\right)\right\} = -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{s^2}{1+s^2}\,\left(-\frac{2}{s^3}\right)\right\} \end{aligned}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$
\begin{aligned}
&= 2\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = 2\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s-i}+\frac{C}{s+i}\right\}\\
&= 2\frac{1}{t}\left(\pounds^{-1}\left\{\frac{A}{s}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{B}{s-i}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{C}{s+i}\right\}\right)\\
&= 2\frac{1}{t}\left(A\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+B\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-i}\right\}+C\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+i}\right\}\right)\\
&= 2\frac{1}{t}\left(A\cdot 1+Be^{it}+Ce^{-it}\right)\\
&= \frac{2}{t}(A+B(\cos t+i\,\mathrm{sen}\,t)+C(\cos t-i\,\mathrm{sen}\,t))
\end{aligned}
$$

pero $\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s-i}+\frac{C}{s+i}$ entonces $A=1$, $B=-\frac{1}{2}$ y $C=-\frac{1}{2}$ luego

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{2}{t}(1-\frac{1}{2}(\cos t+i\,\mathrm{sen}\,t)-\frac{1}{2}(\cos t-i\,\mathrm{sen}\,t)) =\\
&= \frac{2}{t}(1-\cos t)
\end{aligned}
$$

Teorema 6.8 (**Transformada de la Derivada**).

Si $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ son continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es continua a tramos para $t \geq 0$, entonces:

$$\pounds\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n\,F(s) - s^{n-1}\,f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Demostración: por inducción sobre n:

para $n=1$: $\pounds\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,f'(t)\,dt =$

e integrando por partes y teniendo en cuenta que $\lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) = 0,\ s > c$,

$$
\begin{aligned}
&= e^{-st}\,f(t)\big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)\,dt\\
&= -f(0) + s\pounds\{f(t)\}(s)\\
&= s\,F(s) - f(0).
\end{aligned}
$$

Ahora supongamos que se cumple para $n = k$:

$$\pounds\{f^{(k)}(t)\}(s) = s^k\,F(s) - s^{k-1}\,f(0) - s^{k-2}f'(0) - \ldots - sf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)$$

Veamos que se cumple para $n = k+1$:

Universidad de Antioquia Depto. de Matematicas

$$\begin{aligned}
\pounds\{f^{(k+1)}(t)\}(s) &= \pounds\{[f^{(k)}(t)]'\}(s) \\
&\overset{n=1}{=} s\pounds\{f^{(k)}(t)\}(s) - f^{(k)}(0) \\
&\overset{n=k}{=} s(s^k\,F(s) - s^{k-1}\,f(0) - s^{k-2}f'(0) - \ldots - sf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)) - f^{(k)}(0) \\
&= s^{k+1}\,F(s) - s^k f(0) - s^{k-1}f'(0) - \ldots - s^2 f^{(k-2)}(0) - sf^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

NOTA: para resolver E.D. necesitamos, en la mayoría de ejemplos, los casos $n = 1$ y $n = 2$.
Para $n = 1$

$$\pounds\{y'(t)\}(s) = s\,Y(s) - y(0)$$

donde $Y(s) = \pounds\{y(t)\}(s)$

$$n = 2 \quad \pounds\{y''(t)\}(s) = s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$$

Definición 6.3 (**Producto Convolutivo**). *Sean f y g funciones continuas a tramos para $t \geq 0$; el producto convolutivo entre las funciones f y g se define así:*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

NOTA: haciendo el cambio de variable $u = t - \tau$ en la definición de producto convolutivo se demuestra que: $f * g = g * f$ (o sea que la operación $*$ es conmutativa)

Teorema 6.9 (**Transformada del producto convolutivo**).

Si f y g son funciones continuas a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial, entonces

$$\pounds\{(f * g)(t)\}(s) = \pounds\{f(t)\}(s)\ \pounds\{g(t)\}(s) = F(s)\,G(s)$$

Demostración:

$$F(s) \overset{\text{def.}}{=} \int_0^\infty e^{-s\tau}\,f(\tau)\,d\tau \qquad G(s) \overset{\text{def.}}{=} \int_0^\infty e^{-s\beta}\,g(\beta)\,d\beta$$

$$\begin{aligned}
F(s)\,G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau}\,f(\tau)\,d\tau \int_0^\infty e^{-s\beta}\,g(\beta)\,d\beta \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\tau+\beta)s}\,f(\tau)\,g(\beta)\,d\beta\,d\tau
\end{aligned}$$

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matemáticas

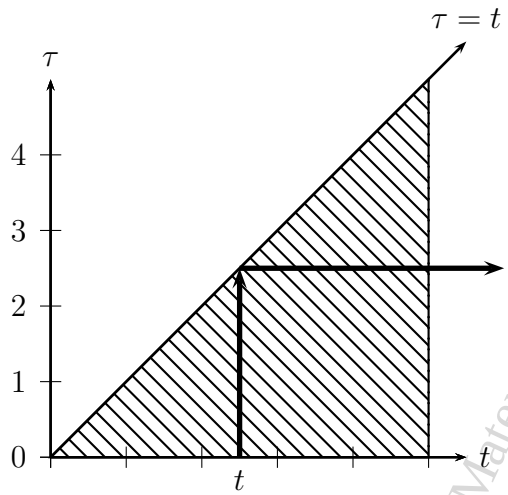


Figura 6.4

$$= \int_0^\infty f(\tau) \left[\int_0^\infty e^{-(\tau+\beta)s}\, g(\beta)\, d\beta \right] d\tau \tag{6.1}$$

Sea $t = \tau + \beta$ dejando constante a τ, luego $dt = d\beta$.
Ahora, cuando $\beta = 0 \Rightarrow t = \tau$ y cuando $\beta \to \infty$ entonces $t \to \infty$
Luego en 6.1

$$F(s)\, G(s) = \int_0^\infty f(\tau) \left[\int_\tau^\infty e^{-ts}\, g(t-\tau)\, dt \right] d\tau$$

Y como f y g son continuas a tramos, podemos cambiar el orden de integración (ver figura 6.4);

$$\begin{aligned}
F(s)\, G(s) &= \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)\, e^{-ts}\, g(t-\tau)\, d\tau\, dt \\
F(s)\, G(s) &= \int_0^\infty e^{-ts} \left[\underbrace{\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau}_{(f*g)(t)} \right] dt = \int_0^\infty e^{-ts}\, (f*g)(t)\, dt \\
&\overset{\text{def.}}{=} \pounds\{(f*g)(t)\}\,(s)
\end{aligned}$$

■

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

NOTA: forma recíproca del teorema $(f * g)(t) = \pounds^{-1}\{F(s)\,G(s)\}$

Corolario 6.1 (**Transformada de la integral**).

Si f es una función continua a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial, entonces:

$$\pounds\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\}(s) = \frac{1}{s}\,F(s) = \frac{1}{s}\,\pounds\{f(t)\}(s)$$

Demostración: tomando $g(t) = 1$ en el teorema de convolución, tenemos

$$\begin{aligned}
\pounds\{g(t)\}(s) &= \pounds\{1\}(s) = \frac{1}{s} \\
\pounds\{(f * g)\} &= \pounds\left\{\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right\} = \pounds\left\{\int_0^t f(\tau)\,1\,d\tau\right\} \\
&= \pounds\{f(\tau)\}(s)\ \pounds\{g(\tau)\}(s) = F(s)\pounds\{1\}(s) \\
\pounds\left\{\int_0^t f(\tau)\ d\tau\right\} &= F(s)\,\frac{1}{s}
\end{aligned}$$

■

Teorema 6.10 (**Generalización de la transformada de una potencia**).

$$\pounds\{t^x\} = \tfrac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}, \quad \textit{para} \quad s > 0 \quad y \quad x > -1$$

Demostración: la función gamma como la definimos en el capítulo anterior es,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{x-1}\ d\tau$$

hagamos $\tau = st$, por tanto $d\tau = s\ dt$ y cuando $\tau = 0$ entonces $t = 0$ y con $\tau \to \infty$ entonces $t \to \infty$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-st}(st)^{x-1}s\ dt = s\int_0^\infty e^{-st}s^{x-1}t^{x-1}\ dt \\
= s^x\int_0^\infty e^{-st}t^{x-1} = s^x\,\pounds\{t^{x-1}\}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\pounds\{t^{x-1}\} = \frac{\Gamma(x)}{s^x} \ \text{ con } \ x > 0 \ \text{ y } \ s > 0$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

luego (cambiando x por $x+1$)

$$\pounds\{t^x\} = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \text{ con } x+1>0 \quad (\text{o sea } x>-1) \text{ y } s>0 \qquad \blacksquare$$

Definición 6.4. *Una función $f(t)$ se dice que es periódica con período T ($T>0$) si para todo t se cumple $f(t+T)=f(t)$.*

El siguiente teorema se deja como ejercicio.

Teorema 6.11 (**Transformada de una función periódica**).

Sea $f(t)$ una función continua a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial. Si $f(t)$ es periódica con período T, entonces:

$$\pounds\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

Ejemplo 12. Hallar $\pounds\left\{\int_0^t e^{-\tau} \cos\tau\, d\tau\right\}(s)$

<u>Solución</u>:

$$\pounds\left\{\int_0^t e^{-\tau} \cos\tau\, d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}\pounds\{e^{-\tau} \cos\tau\}(s)$$

Pero

$$\begin{aligned}
\pounds\{e^{-\tau} \cos\tau\}(s) &= \pounds\{\cos\tau\}(s+1) \\
&= \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} \\
\pounds\left\{\int_0^t e^{-\tau} \cos\tau\, d\tau\right\}(s) &= \frac{1}{s}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]
\end{aligned}$$

Ejemplo 13. Hallar $\pounds\{e^{-t} * e^t \cos t\}(s)$

<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned}
\pounds\{e^{-t} * e^t \cos t\}(s) &\overset{def*}{=} \pounds\{e^{-t}\}(s)\, \pounds\{e^t \cos t\}(s) \\
&= \frac{1}{s+1}\,\frac{s-1}{(s-1)^2+1}
\end{aligned}$$

Observese que el ejemplo siguiente lo resolvemos con los resultados de los teoremas de la transformada y no necesitamos utilizar los dispendiosos métodos

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

de las fracciones parciales.

Ejemplo 14. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t)$

<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned}
&\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) = \frac{1}{2}\pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\,\frac{s}{s^2+4}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\,(f*g)(t) = \frac{1}{2}\,(\operatorname{sen}2t * \cos 2t) \overset{\text{def.}}{=}{}^{*}\ \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen}2\tau\ \cos 2(t-\tau)\,d\tau\\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen}2\tau(\cos 2t\ \cos 2\tau + \operatorname{sen}2t\ \operatorname{sen}2\tau)\,d\tau\\
&= \frac{1}{2}\ \cos 2t\int_0^t \operatorname{sen}2\tau\cos 2\tau\,d\tau + \frac{1}{2}\ \operatorname{sen}2t\ \int_0^t \operatorname{sen}^2 2\tau\,d\tau\\
&= \frac{1}{8}\ \cos 2t\operatorname{sen}^2 2t + \frac{1}{4}t\operatorname{sen}2t - \frac{1}{16}\operatorname{sen}2t\operatorname{sen}4t
\end{aligned}$$

Utilizando los teoremas vistos sobre transformada, efectuar los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. Hallar $\int_0^\infty e^{-5t}[\int_0^t te^{3t}\operatorname{sen}2t\ dt]\ dt$
(**Rta.:** $\frac{1}{40}$)

Ejercicio 2. Mostrar que

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s^3+3s^2+1}{s^2(s^2+2s+2)}\right\} = \frac{3}{2}\,e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\operatorname{sen}t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,t$$

Ejercicio 3. Mostrar que $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\} = e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\operatorname{sen}t$

Ejercicio 4. Mostrar que $\pounds^{-1}\left\{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{2}\right\} = \frac{\operatorname{sen}2t}{t}$

Ejercicio 5. Mostrar que $\pounds^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} = \frac{\operatorname{sen}t}{t}$

Ejercicio 6. Mostrar que $\pounds^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{3}{s+2}\right\} = \frac{e^{-2t}\operatorname{sen}3t}{t}$

Ejercicio 7. Mostrar que
a) $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^3}\right\} = \frac{1}{8}(t\operatorname{sen}t - t^2\cos t)$, b) $\pounds^{-1}\left\{\ln\frac{s^2+1}{s^2+4}\right\} = \frac{2}{t}(\cos 2t - \cos t)$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejercicio 8. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}\right\}$
(**Rta.:** $-\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2})\operatorname{sen} t)$)

Ejercicio 9. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+4}e^{-\pi s}\right\}$
(**Rta.:** $\frac{1}{2}e^{-2(t-\pi)}\operatorname{sen} 2(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)$)

Ejercicio 10. Hallar $\pounds\left\{t\int_0^t \operatorname{sen}\tau\, d\tau\right\}(s)$
(**Rta.:** $\frac{3s^2+1}{s^2(s^2+1)^2}$)

Ejercicio 11. Hallar $\pounds\left\{e^{-2t}\int_0^t \tau e^{2\tau}\operatorname{sen}\tau\, d\tau\right\}(s)$
(**Rta.:** $\frac{2s}{(s+2)(s^2+1)^2}$)

Ejercicio 12. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

Ejercicio 13. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\}$

Ejercicio 14. Mostrar que $\pounds\{t^{\frac{5}{2}}\} = \frac{15}{8s^3}\left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$

Ejercicio 15. Hallar $\pounds\{t^{\frac{5}{2}}e^{2t}\}$

Ejercicio 16. Emplear la transformada de Laplace y su inversa para mostrar que

$$t^m * t^n = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}$$

Ejercicio 17. Sea $f(t) = \frac{a}{b}t$ de período b (función "serrucho", ver figura 6.5). Hallar $\pounds\{f(t)\}(s)$

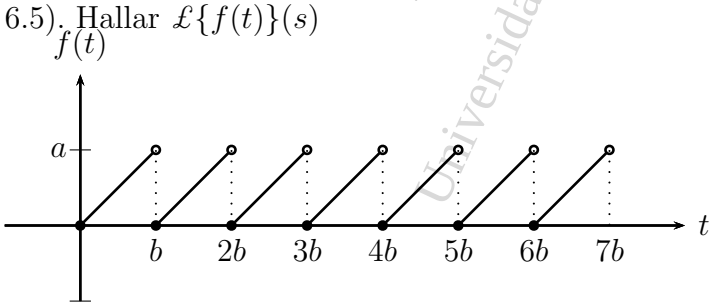


Figura 6.5

(**Rta.:**$\frac{a}{s}(\frac{1}{bs} - \frac{1}{e^{bs-1}})$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejercicio 18. Sea

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{si } 0 \le t \le \pi \\ 0, & \text{si } \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

periódica de período 2π (función rectificación de la mitad de la onda seno. Ver figura 6.6). Hallar $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

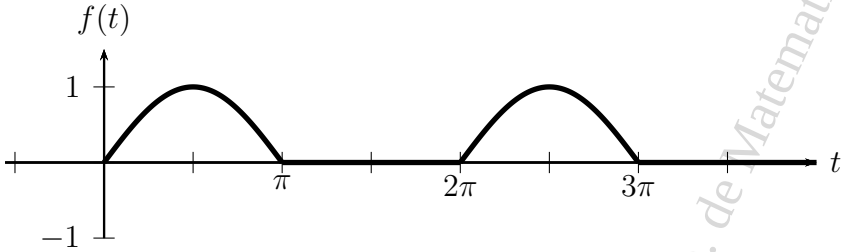


Figura 6.6

(**Rta.:**$\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$)

Ejercicio 19. Sea

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \le t < a \\ -1, & \text{si } a \le t < 2a \end{cases}$$

periódica de período $2a$ (función onda cuadrada. Ver figura 6.7). Hallar $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

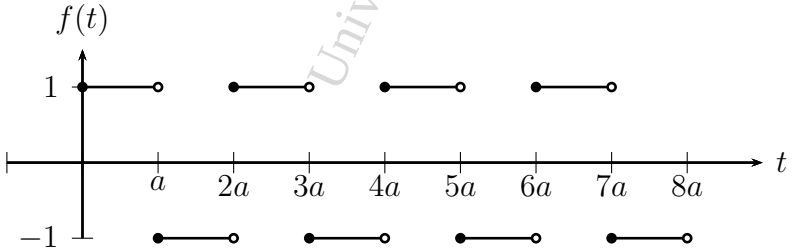


Figura 6.7

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

(**Rta.:** $\frac{1}{s}[\frac{2}{1+e^{-as}} - 1] = \frac{1}{s}[\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}] = \frac{1}{s}\tanh\frac{as}{2}$)

Ejercicio 20. Sea

$$f(t) = \begin{cases} b, & \text{si } 0 \leq t < a \\ 0, & \text{si } a \leq t < 2a \\ -b, & \text{si } 2a \leq t < 3a \\ 0, & \text{si } 3a \leq t < 4a \end{cases}$$

periódica de período $4a$
(**Rta.:** $\frac{b}{s}[\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-2as}}]$)

Ejercicio 21. Sea $f(t)$ la función de onda triángular (ver figura 6.8). Mostrar que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s^2}\tanh\frac{s}{2}$

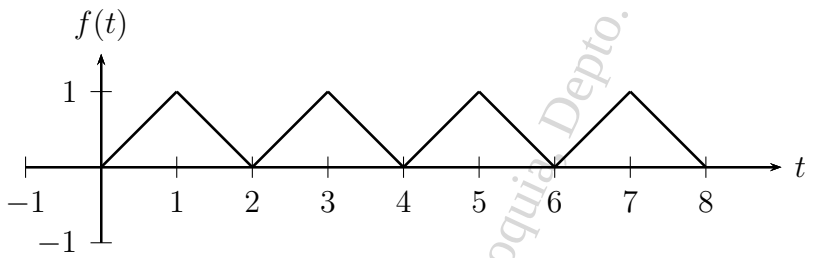


Figura 6.8

Ejercicio 22. Sea $f(t)$ la función rectificación completa de la onda de $\operatorname{sen} t$ (ver figura 6.9). Mostrar que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1}\coth\frac{\pi s}{2}$

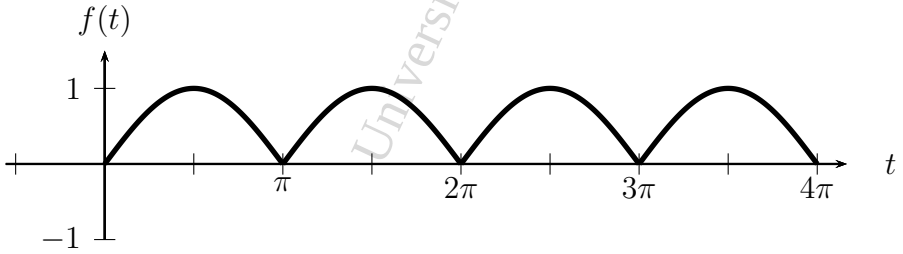


Figura 6.9

Universidad de Antioquia Depto. de Matematicas

Ejercicio 23.

a). Si $f(t)$ es continua a tramos y de orden exponencial y si

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$$

existe, entonces

$$\pounds\{\frac{f(t)}{t}\}(s) = \int_s^\infty F(s)\, ds$$

donde $F(s) = \pounds\{f(t)\}(s)$

b). Mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_0^\infty F(s)\, ds$$

c). Hallar

1. $\int_0^\infty e^{-ax}(\frac{\operatorname{sen} bx}{x})\, dx$
   (**Rta.:** $\tan^{-1}\frac{b}{a}$)
2. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\, dx$
   (**Rta.:**$\ln\frac{b}{a}$)
3. Mostrar que $\pounds\{\frac{e^t-e^{-t}}{t}\} = \ln(s+1) - \ln(s-1)$, con $s > 1$
4. Mostrar que $\pounds\{\int_0^t \frac{1-\cos a\tau}{\tau}\, d\tau\} = \frac{1}{2s}\ln\frac{s^2+a^2}{s^2}$
5. Mostrar formalmente, que si $x > 0$ entonces
   a) $f(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$; b) $f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}e^{-x}$
6. Hallar $\pounds\{\frac{\operatorname{sen} kt}{t}\}$
   (**Rta.:** $\tan^{-1}\frac{k}{s}$)

Ejercicio 24. Mostrar que

a). $\pounds^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{s^2}\} = (t-3)\mathcal{U}(t-3)$

b). $\pounds^{-1}\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\} = \operatorname{sen}(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi) = -\operatorname{sen} t\mathcal{U}(t-3)$

c). $\pounds^{-1}\{\frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1}\} = (1-\mathcal{U}(t-2\pi))\operatorname{sen} t$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

d). $\pounds^{-1}\{\frac{s(1+e^{-3s})}{s^2+\pi^2}\} = (1-\mathcal{U}(t-3))\cos\pi t$

e). Hallar $\pounds^{-1}\{\frac{s-se^{-\pi s}}{1+s^2}\}$
(**Rta.:** $\cos t - \mathcal{U}(t-\pi)\cos(t-\pi)$)

Ejercicio 25. Usando la definición de producto convolutivo, demostrar las siguientes propiedades de este producto:

a. Propiedad conmutativa: $f * g = g * f$

b. Propiedad asociativa: $(f * g) * h = f * (g * h)$

c. Propiedad distributiva: $f * (g + h) = f * g + f * h$

6.4. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA A LAS E.D.

Pasos:

- Aplicar la transformada a ambos lados de la ecuación
- Aplicar el teorema de la transformada de la derivada
  $\pounds\{y'\} = sY(s) - y(0)$
  $\pounds\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$
  donde $Y(s) = \pounds\{y(t)\}(s)$
  Nota: cuando las condiciones iniciales no estan dadas en $t = 0$, sino en $t = a$, se hace el cambio de variable $\tau = t - a$, con este cambio de variable, la nueva E.D. tiene condiciones iniciales en $\tau = 0$.
- Conseguir una función en s, es decir, despejar $Y(s)$
- Hallar la transformada inversa: $y(t) = \pounds^{-1}\{Y(s)\}$

Ejemplo 15. Hallar la solución de $y''-4y'+4y = t^3\,e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$
Solución:

① : $\pounds\{y''\} - 4\pounds\{y'\} + 4\pounds\{y\} = \pounds\{t^3\,e^{2t}\}$

② : $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = \dfrac{3!}{(s-2)^4}$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$
\begin{aligned}
③ \quad &: \quad s^2Y(s) - 4sY(s) + 4Y(s) = \frac{3!}{(s-2)^4} \\
④ \quad &: \quad Y(s) = \frac{\frac{3!}{(s-2)^4}}{s^2-4s+4} = \frac{3!}{(s-2)^4(s-2)^2} = \frac{3!}{(s-2)^6} \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{(s-2)^6}\right\} \\
&= \frac{1}{4\times 5}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!\,(4\times 5)}{(s-2)^6}\right\} = \frac{1}{4\times 5}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{(s-2)^6}\right\} = \frac{t^5}{20}\,e^{2t}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 16. Hallar la solución de $y'(t) = 1 - \operatorname{sen} t - \int_0^t y(t)\,dt, \quad y(0) = 0$

<u>Solución</u>:

$$
\begin{aligned}
① \quad &: \quad \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) - \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) - \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(t)\,dt\right\}(s) \\
&\quad s\,Y(s) - y(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1^2} - \frac{1}{s}\,Y(s) \\
② \quad &: \quad Y(s)\left(s + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} \\
&\quad Y(s)\left(\frac{s^2+1}{s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} \\
③ \quad &: \quad Y(s) = \frac{s}{s^2+1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{(s^2+1)^2} \\
④ \quad &: \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} \\
&\quad y(t) = \operatorname{sen} t - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\frac{s}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t * \cos t \\
&= \operatorname{sen} t - \int_0^t \operatorname{sen}\tau\cos(t-\tau)\,d\tau \\
&= \operatorname{sen} t - \int_0^t \operatorname{sen}\tau(\cos t\cos\tau + \operatorname{sen}\tau\operatorname{sen} t)\,d\tau \\
&= \operatorname{sen} t - \cos t\int_0^t \operatorname{sen}\tau\cos\tau\,d\tau - \operatorname{sen} t\int_0^t \operatorname{sen}^2\tau\,d\tau \\
&= \frac{1}{2}\cos t\operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} t\operatorname{sen} 2t
\end{aligned}
$$

Universidad de Antioquia, Depto de Matemáticas

Ejemplo 17. Hallar la solución de $ty'' - y' = t^2, \quad y(0) = 0$
Solución:

$$\begin{aligned}
\pounds\{ty''\}(s) - \pounds\{y'\}(s) &= \pounds\{t^2\} \\
(-1)\,\frac{d}{ds}\,\pounds\{y''\}(s) - (s\,Y(s) - y(0)) &= \frac{2!}{s^3} \\
-\frac{d}{ds}\,(s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0)) - s\,Y(s) &= \frac{2!}{s^3} \\
-\frac{d}{ds}\,(s^2 Y(s)) - sY(s) &= \frac{2!}{s^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-(s^2\,Y'(s) + 2sY(s)) - s\,Y(s) &= \frac{2}{s^3} \\
-s^2Y'(s) - 3sY(s) &= \frac{2}{s^3} \\
Y'(s) + \frac{3}{s}\,Y(s) &= -\frac{2}{s^5}\ , \quad \text{E.D. lineal de primer orden} \\
F.I\ e^{\int \frac{3}{s}\,ds} &= e^{3\ln s} = s^3 \\
Y(s)\,s^3 &= \int -\frac{2}{s^5}\,s^3\,ds + C = -2\,\frac{s^{-1}}{-1} + C \\
Y(s) &= \frac{2}{s^4} + \frac{C}{s^3} \\
y(t) &= \pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^4}\right\} + C\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} \\
&= 2\,\frac{t^3}{3!} + C\,\frac{t^2}{2!}
\end{aligned}$$

Ejemplo 18. Hallar la solución de $ty'' + y = 0, \quad y(0) = 0$
Solución:

$$\begin{aligned}
\pounds\{ty''\}(s) + Y(s) &= (-1)\,\frac{d}{ds}\,(\pounds\{y''\}(s)) + Y(s) \\
&= -\frac{d}{ds}\,(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + Y(s) \\
&= -\frac{d}{ds}\,(s^2Y(s)) + Y(s) = -(s^2Y'(s) + 2sY(s)) + Y(s) \\
&= -s^2Y'(s) - 2sY(s) + Y(s) = s^2Y'(s) + Y(s)(2s-1) \\
&= Y'(s) + \left(\frac{2s-1}{s^2}\right)\,Y(s) = Y'(s) + \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}\right)\,Y(s)
\end{aligned}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

$$F.I. = e^{\int\left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}\right)ds} = e^{2\ln s - \frac{s^{-1}}{-1}},$$

E.D. lineal del primer orden

$$\begin{aligned}
F.I. &= s^2\, e^{\frac{1}{s}} \\
Y(s)\, s^2\, e^{\frac{1}{s}} &= \int F.I.\,(0) + C \\
Y(s) = \frac{C}{s^2}\, e^{-\frac{1}{s}} &= C\,\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s^2} \\
&= C\,\frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{1}{1!}\,\frac{1}{s} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{s^2} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{s^3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{s^n} + \ldots\right) \\
Y(s) &= C\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{1!}\,\frac{1}{s^3} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{s^4} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{s^5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{s^{n+2}} + \ldots\right) \\
y(t) &= \pounds^{-1}\{Y(s)\} \\
&= C\left(\frac{t}{1!} - \frac{1}{1!}\,\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2!}\,\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{3!}\,\frac{t^4}{4!} + \frac{1}{4!}\ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots\right)
\end{aligned}$$

Resolver los siguientes ejercicios por transformada de Laplace

Ejercicio 1. $y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
(**Rta.:** $y = \frac{1}{20}t^5e^{2t}$)

Ejercicio 2. $y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$
(**Rta.:** $y = 2e^{3t} + 2\frac{t^4}{4!}e^{3t}$)

Ejercicio 3. $y'' - 2y' + y = e^{t-1}, \qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = 5$
(**Rta.:** $y = 5(t-1)e^{t-1} + \frac{1}{2}(t-1)^2e^{t-1}$)

Ejercicio 4. $y'' - 6y' + 9y = t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta.:** $y = \frac{10}{9}te^{3t} - \frac{2}{27}e^{3t} + \frac{t}{9} + \frac{2}{27}$)

Ejercicio 5. $y'' + y' - 4y - 4\int_0^t y\,d\tau = 6e^t - 4t - 6, \quad y(0) = y'(0) = 0$
(**Rta.:** $y(t) = 1 - e^t - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$)

Ejercicio 6. Hallar $f(t)$ para la siguiente ecuación integral

$$f(t) + \int_0^t f(\tau)\; d\tau = 1$$

Universidad de Antioquia. Depto. de Matemáticas

(**Rta.:** $f(t) = e^{-t}$)

Ejercicio 7. $y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\, d\tau = 1, \quad y(0) = 0$
(**Rta.:** $y = te^{-3t}$)

Ejercicio 8. $y'(t) - 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\, d\tau = t, \quad y(0) = 0$
(**Rta.:** $y = \frac{t}{3}e^{3t} - \frac{1}{9}e^{3t} + \frac{1}{9}$)

Ejercicio 9. $y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\, d\tau = t, \quad y(0) = 0$
(**Rta.:** $y = -\frac{t}{3}e^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{9}$)

Ejercicio 10. $y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\ \ d\tau, \quad y(0) = 1$
(**Rta.:** $y = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$)

Ejercicio 11. $ty'' + 2ty' + 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
(**Rta.:** $y(t) = 3te^{-2t}$)

Ejercicio 12. $ty'' - ty' - y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
(**Rta.:** $y(t) = 3te^{t}$)

Ejercicio 13. $ty'' + 4ty' + 4y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$
(**Rta.:** $y = 2te^{-4t}$)

Ejercicio 14. $t^2y'' + 2ty' + t^2y = 0$
(**Rta.:** $y = -C\frac{\operatorname{sen} t}{t}$)

Ejercicio 15. $ty'' + y = 12t, \quad y(0) = 0$
(**Rta.:** $y(t) = 12t + C(t - \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2!}\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{3!}\frac{t^4}{4!} + \frac{1}{4!}\frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots))$

Ejercicio 16. $y'' + 4y = f(t)$ donde $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases}$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = -1$
(**Rta.:** $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2t}{4} - \frac{1}{2}\mathcal{U}(t-1)\operatorname{sen} 2(t-1) - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$)

Ejercicio 17. $y'' + 4y = f(t)$ donde $f(t) = \operatorname{sen} t\, \mathcal{U}(t - 2\pi)$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
(**Rta:** $y(t) = \cos 2t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t-2\pi)\mathcal{U}(t-2\pi) - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2(t-2\pi)\,\mathcal{U}(t-2\pi)$)

Ejercicio 18. $y'' - 5y' + 6y = \mathcal{U}(t-1),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
(**Rta.:** $y(t) = e^{3t} - e^{2t} + \mathcal{U}(t-1)[\frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{3(t-1)} - \frac{1}{2}e^{2(t-1)}]$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejercicio 19. $y'' - y' = e^t \cos t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
(**Rta:** $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t \cos t + \frac{1}{2}e^t \operatorname{sen} t$)

Ejercicio 20. Hallar $f(t)$ si:

i. $f(t) + \int_0^t (t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau = t$
(**Rta:** $f(t) = \operatorname{sen} t$)

ii. $f(t) + 4\int_0^t \operatorname{sen}\tau\, f(t-\tau)\, d\tau = 2t$

iii. $f(t) = te^t + \int_0^t \tau\, f(t-\tau)\, d\tau$
(**Rta:** $f(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^t + \frac{3}{4}te^t + \frac{1}{4}t^2e^t$)

iv. $f(t) + \int_0^t f(\tau)\, d\tau = e^t$
(**Rta:** $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$)

v. $f(t) + \int_0^t f(\tau)\, d\tau = t$
(**Rta:** $f(t) = -e^{-t} + 1$)

Ejercicio 21. Sea $x(t)$ la solución de la ecuación de Bessel de orden cero

$$tx'' + x' + tx = 0$$

tal que $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$. Demostrar que

a. $\pounds\{x(t)\}(s) = \pounds\{J_0(t)\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$,

b. Mostrar formalmente $\int_0^\infty J_0(x)\, dx = 1$,

c. Mostrar formalmente $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos t)\, dt$
(**Ayuda:** $\int_0^\pi \cos^{2n} x\, dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\pi$)

6.5. IMPULSO UNITARIO O "FUNCIÓN DELTA"DE DIRAC

En muchos sistemas mecánicos, eléctricos, etc; aparecen fuerzas externas muy grandes que actúan en intervalos de tiempo muy pequeños, por ejemplo

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

un golpe de martillo en un sistema mecánico, o un relámpago en un sistema eléctrico. La forma de representar esta fuerza exterior es con la "función δ"-Dirac.

Definición 6.5. $\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & si \;\; t_0 - a \leq t \leq t_0 + a \\ 0, & si \;\; t < t_0 - a \quad o \quad t > t_0 + a \end{cases}$
donde a y t_0 son constantes positivas y $t_0 \geq a$.

Nota: para todo $a > 0$ y para todo $t_0 > 0$ se cumple que (Ver figura 6.10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t-t_0) = 1$$

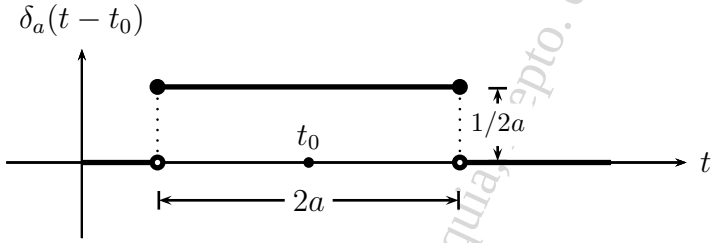


Figura 6.10

Definición 6.6. *Se llama impulso unitario ó función delta de Dirac a la "función"definida por el límite:*

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t-t_0)$$

Ver figura 6.11 en la página siguiente.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

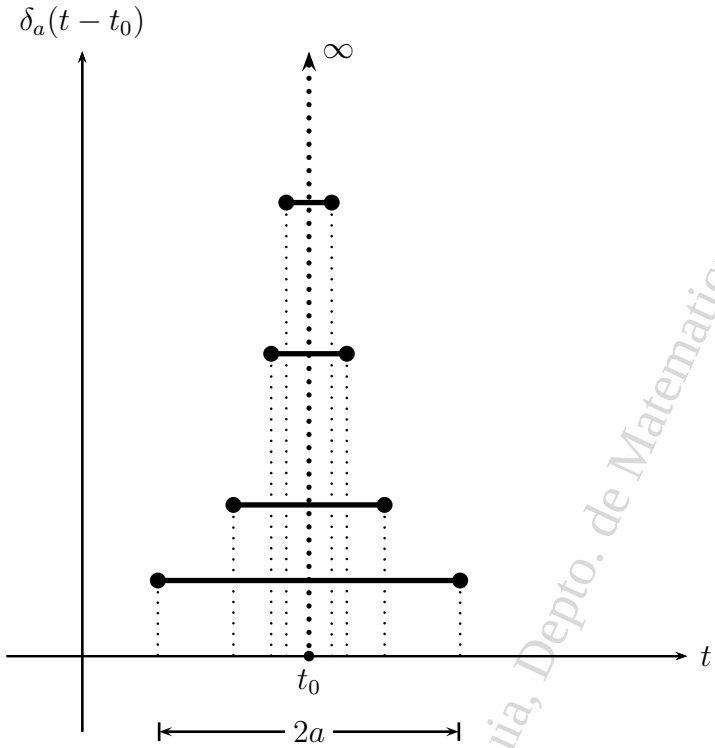


Figura 6.11

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Propiedades:

1. $\delta(t-t_0)$ es infinita en $t=t_0$ y cero para $t \neq t_0$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1$

3. $\pounds\{\delta_a(t-t_0)\}(s) = e^{-st_0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2as}\right)$

4. $\pounds\{\delta(t-t_0)\}(s) \overset{\text{def.}}{=} \lim\limits_{a\to 0} \pounds\{\delta_a(t-t_0)\}(s) \overset{\text{L'Hôpital}}{=} e^{-st_0}$

5. si $t_0 = 0 \Rightarrow \pounds\{\delta(t)\}(s) = 1$

6. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$, en particular $\int_0^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$

7. Por 6. podemos decir que $\pounds\{f(t)\delta(t-t_0)\}(s) = e^{-t_0 s} f(t_0)$

Notar que en la propiedad 5. $\lim\limits_{s\to\infty} \pounds\{f(t)\}(s) = 1$, mientras que por teorema anterior vimos que cuando una función es de orden exponencial $\lim\limits_{s\to\infty} \pounds\{f(t)\}(s) = 0$, lo cual es una contradicción, esto nos indica que la "función" δ-Dirac no es de orden exponencial, es por esto que δ es una "función" extraña. Más precisamente, esta función es tratada con detenimiento en los textos de Teoría de Distribuciones (Ver texto de Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais de Djairo Guedes de Figueiredo)

Ejercicio 1. $y'' + y = \delta(t-2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta:** $y(t) = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(t-2\pi)\mathcal{U}(t-2\pi)$)

Ejercicio 2. $y'' + 2y' + 2y = \cos t\ \delta(t-3\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
(**Rta:** $y(t) = e^{-t}\cos t - e^{-(t-3\pi)} \operatorname{sen}(t-3\pi)\mathcal{U}(t-3\pi)$)

Ejercicio 3. $y'' + y = \delta(t-\pi)\cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta:** $y = [1 + \mathcal{U}(t-\pi)] \operatorname{sen} t$)

Ejercicio 4. $y'' + 2y' = \delta(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta:** $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right]\mathcal{U}(t-1)$)

Ejercicio 5. $y'' + 4y' + 5y = \delta(t-2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
(**Rta:**$y = e^{-2(t-2\pi)} \operatorname{sen} t\, \mathcal{U}(t-2\pi)$)

Ejercicio 6. $y'' + y = e^t\delta(t-2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
(**Rta:** $y = e^{2\pi} \operatorname{sen}(t-2\pi)\, \mathcal{U}(t-2\pi)$)

Ejercicio 7. $y'' - 2y' = 1 + \delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta:** $y = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\mathcal{U}(t-2) + \frac{1}{2}e^{2(t-2)}\mathcal{U}(t-2)$)

6.6. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Ejemplo 19. Utilizando el Paquete Maple, descomponer en fracciones parciales las siguientes expresiones: a) $F(s) = \frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(a-1)}$, b) $F(s) =$

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matemáticas

$\frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}$, c) $F(s) = \frac{s^2-16}{s^3(s+2)^2}$, d) $F(s) = \frac{s^3+3s^2+1}{s^2(s^2+2s+2)}$, e) $F(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$

a).
```
>F1(s) := (7*s-1)/((s-3)*(s+2)*(s-1));
>convert(F1(s),parfrac,s);
```

$$F1(s) := \frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(a-1)}$$

$$\frac{2}{s-3} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

b).
```
>F2(s) :=(2*s+4)/((s-2)*(s^2+4*s+3));
>convert(F2(s),parfrac,s);
```

$$F2(s) := \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}$$

$$\frac{8}{15(s-2)} - \frac{1}{5(s+3)} - \frac{1}{3(s+1)}$$

c).
```
>F2(s) := (2*s+4)/((s-2)*(s^2+4*s+3));
>convert(F2(s),parfrac,s);
```

$$F3(s) := \frac{s^2-16}{s^3(s+2)^2}$$

$$-\frac{11}{4s} + \frac{11}{4(s+2)} - \frac{4}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{3}{2(s+2)^2}$$

d).
```
>F4(s) := (s^3+3*s^2+1)/(s^2*(s^2+2*s+2));
>convert(F4(s),parfrac,s,complex);
```

$$F4(s) := \frac{s^3+3s^2+1}{s^2(s^2+2s+2)}$$

$$-\frac{0{,}5000000000}{s} + \frac{0{,}7500000000 + 1{,}000000000I}{s + 1{,}000000000 + 1{,}000000000I} + \\ + \frac{0{,}7500000000 - 1{,}000000000I}{s + 1. - 1.I} + \frac{0{,}5000000000}{s^2}$$

```
>convert(%,fraction);
```

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

$$-\frac{1}{(2s)}+\frac{(\frac{3}{4}+I)}{(s+1+I)}+\frac{(\frac{3}{4}-I)}{(s+1-I)}+\frac{1}{(2s^2)}$$

e).
```
>F5(s) := (s^2)/((s^2+1)^2);
>convert(F5(s),parfrac,s,complex);
```

$$F5(s) := \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$$

$$\frac{0{,}2500000000}{(s+1{,}000000000I)^2}+\frac{0{,}2500000000}{(s-1.I)^2}-\frac{0{,}2500000000I}{s-1.I}+\frac{0{,}2500000000I}{s+1{,}000000000I}$$

```
>convert(%,fraction);
```

$$\frac{1}{4(s+I)^2}+\frac{1}{4(s-I)^2}-\frac{\frac{1}{4}I}{s-I}+\frac{\frac{1}{4}I}{s+I}$$

Ejemplo 20. Hallar la transformada de Laplace de las funciones: $\operatorname{sen}(kt)$, $\cos(kt)$, e^{kt}

Efectuar las siguientes instrucciones:

```
>with(inttrans):laplace(cos(k*t),t,s);
```

$$\frac{s}{s^2+k^2}$$

```
>with(inttrans):laplace({sin(k*t),exp(k*t)},t,s);
```

$$\frac{1}{s-k},\ \frac{k}{s^2+k^2}$$

Ejemplo 21. Hallar la transformada de $e^t \operatorname{sen}(2t)$ y calcular la transformada inversa de $\frac{2}{(s-1)^2+4}$

Efectuar las siguientes instrucciones:

```
>with(inttrans):laplace(exp(t)*sin(2*t),t,s);
```

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$\frac{2}{(s-1)^2+4}$$

```
>invlaplace(%,s,t);
```

$$e^t \operatorname{sen}(2t)$$

Ejemplo 22. Resolver, usando transformada de Laplace, la E.D.

$$x'' + 16x = \cos 4t$$

con $x(0) = 0, \;\; x'(0) = 1$

Efectúe las siguientes instrucciones:

```
>with(ODEtools):Eqn2:=D(D(x))(t)+16*x(t)=cos(4*t):
dsolve({Eqn2,x(0)=0,D(x)(0)=1},x(t),method=laplace);
```

$$x(t) = \left(\frac{t}{8} + \frac{1}{4}\right) \operatorname{sen}(4t)$$

Ejemplo 23. Resolver, usando transformada de Laplace, la ecuación integro-diferencial $y'(t) = 1 - \operatorname{sen} t - \int_0^t y(\tau) \;\; d\tau$ con la condición $y(0) = 0$

Efectuar los siguientes instrucciones:

```
>with(ODEtools):Eqn2:=D(y)(t)=1-sin(t)-int(y(s),s=0..t):
dsolve({Eqn2,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(t),method=laplace);
```

$$y(t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right) \operatorname{sen}(t)$$

Ejemplo 24. Resolver, usando transformada de Laplace, la E.D. $y' + y = U(t-1)$ con la condición $y(0) = 0$ (U es la función escalón unitario)

Efectuar los siguientes pasos:

```
>restart: with(ODEtools): ode := diff(y(t),t) + y(t) =
5*piecewise(t<1,0,t>=1,1):dsolve({ode,y(0)=0},y(t),method=laplace);
```

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \text{undefind} & t = 1 \\ -5e^{(1-t)} + 5 & t > 1 \end{cases}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

CAPÍTULO 7

SISTEMAS LINEALES DE PRIMER ORDEN

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

7.1. INTRODUCCION

Estudiaremos el sistema de n ecuaciones lineales de primer orden:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n + f_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n + f_n(t) \end{aligned} \tag{7.1}$$

el cual se denomina no homogénea si $f_i \neq 0$ para algún $i = 1, 2, \ldots, n$.
El sistema homogéneo asociado al anterior sistema es:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)\,x_1 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)\,x_1 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n \end{aligned} \tag{7.2}$$

Sea $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$, $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$ y $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$,
entonces el sistema (7.1) se puede escribir:

$$\vec{x}\,'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \tag{7.3}$$

y la homogénea asociada (7.2) se puede escribir como

$$\vec{x}\,'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) \tag{7.4}$$

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\vec{x}\,'(t) \;=\; A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \tag{7.5}$$

donde

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

Decimos que la función vectorial

$$\vec{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{bmatrix}$$

es solución de (7.5), si $\vec{\phi}(t)$ es derivable, satisface la ecuación diferencial y la condición inicial dada, es decir, si

$$\vec{\phi}(t_0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix} \;=\; \vec{x}_0$$

Teorema 7.1.

Sean $A(t)$ y $\vec{f}(t)$ funciones matricial y vectorial respectivamente y continuas en $[a, b]$, entonces existe una única función vectorial $\vec{\phi}(t)$ que es solución del problema de valor inicial (7.5) en $[a, b]$.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

(Ver la demostración de este teorema en el Apéndice)

Ejemplo 1. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1' &= -4x_1 - x_2 \\ x_2' &= x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

con $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 2$.

<u>Solución</u>: el sistema puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sus soluciones son de la forma:

$$\vec{\phi}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix}, \qquad \vec{\phi}_2(t) = \begin{bmatrix} (1-t)\, e^{-3t} \\ t\, e^{-3t} \end{bmatrix}$$

También

$$\vec{\phi}(t) = \begin{bmatrix} (1-3t)\, e^{-3t} \\ (2+3t)\, e^{-3t} \end{bmatrix}$$

es un vector solución que satisface la condición inicial.

Nota: toda E.D. de orden n se puede reducir a un sistema de E.D. de primer orden. En efecto, sea

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}) \tag{7.6}$$

una E.D. de orden n (lineal o no lineal), donde t es la variable independiente, haciendo

$$x = x_1,\ x' = x_2,\ x'' = x_3, \cdots, x^{(n-1)} = x_n$$

obtenemos el siguiente sistema de primer orden:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_n' &= f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}) \end{aligned} \tag{7.7}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

la E.D. 7.6 es equivalente al sistema 7.7, esto quiere decir que si $x(t)$ es solución de 7.6 entonces $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = x''$, $\cdots, x_n = x^{(n-1)}$ son solución del sistema 7.7 y recíprocamente, si $x_1(t)$, $x_2(t), \cdots, x_n(t)$ son solución del sistema 7.7 entonces $x(t) = x_1(t)$ es solución de la E.D. de orden n 7.6.

Ejemplo 2. Convertir en un sistema la siguiente E.D.:

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = \operatorname{sen} t$$

Solución: hagamos $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = x''$ y obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
x_1' &= x' = x_2 \\
x_2' &= x'' = x_3 \\
x_3' &= x''' = 6x'' - 11x' + 6x + \operatorname{sen} t = 6x_3 - 11x_2 + 6x_1 + \operatorname{sen} t \\
&= 6x_1 - 11x_2 + 6x_3 + \operatorname{sen} t
\end{aligned}$$

matricialmente la E.D. queda así

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

7.2. CONJUNTOS FUNDAMENTALES Y SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Consideremos el sistema homogéneo $\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x}$ donde $\vec{x}$ es un vector de n componentes y $A(t)$ una matriz de $n \times n$.
Si $\vec{\phi}_1(t), \ldots, \vec{\phi}_n(t)$, son n soluciones linealmente independientes del sistema, entonces decimos que este conjunto es un conjunto fundamental de soluciones; la matriz

$$\Phi(t) = [\vec{\phi}_1(t), \ldots, \vec{\phi}_n(t)] = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \cdots & \phi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \cdots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

o sea, la matriz cuyas columnas son $\vec{\phi}_1(t), \ldots, \vec{\phi}_n(t)$ los cuales son linealmente independientes, la llamamos una matriz fundamental y decimos que

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

$\Phi(t)$ es una solución matricial ya que cada una de sus columnas es solución de $\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x}$.

Definición 7.1 (**Matriz Principal**). *Decimos que la matriz fundamental $\boldsymbol{\varphi}(t)$ es matriz principal si*

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = I = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: esta matriz es única.

Definición 7.2 (**Wronskiano**). *Sea $\Phi(t)$ una matriz solución (es decir, cada columna es un vector solución) de $\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x}$, entonces $W(t) = det\,\Phi(t)$ lo llamamos el Wronskiano de $\Phi(t)$.*

Observación: si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental, entonces

$$W(t) = det\,\Phi(t) \neq 0$$

7.3. MÉTODO DE LOS VALORES Y VECTORES PROPIOS

Consideremos el sistema

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} \tag{7.8}$$

donde $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ es una matriz constante

El objetivo es hallar n soluciones linealmente independientes: $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$. Para ello imaginemos la solución del tipo $\vec{x}(t) = e^{\lambda\,t}\,\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es un vector constante, como

$$\frac{d}{dt}\,e^{\lambda\,t}\,\vec{v} = \lambda e^{\lambda\,t}\,\vec{v}$$

Universidad de Antioquia, Depto de Matematicas

y $A(e^{\lambda t}\,\vec{v}) = e^{\lambda t}\,A\vec{v}$, de (7.8) tenemos que:

$$\lambda e^{\lambda t}\,\vec{v} = A(e^{\lambda t}\,\vec{v}) = e^{\lambda t}\,A\,\vec{v},$$

luego

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \tag{7.9}$$

Es decir, $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\,\vec{v}$ es solución de (7.8) si y solo si λ y $\vec{v}$ satisfacen (7.9).

Definición 7.3 (Vector y valor propio). *Un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ que satisface $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ se le llama vector propio de A con valor propio λ.*

NOTA:

- $\vec{v} = \vec{0}$ siempre satisface $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ para cualquier matriz A, por esto no nos interesa.

- λ es un valor propio de la matriz A si y solo si

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda\vec{v} = (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \tag{7.10}$$

  es decir, $\vec{v}$ satisface sistema homogéneo de n ecuaciones con n incognitas

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \tag{7.11}$$

  donde I es la matriz identidad.

  La ecuación (7.11) tiene una solución $\vec{v} \neq \vec{0}$ si y solo si $det(A - \lambda I) = 0$, luego los valores propios de A son las raíces de la ecuación.

$$0 = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

  $=$ Polinomio en λ de grado $n = p(\lambda)$.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Definición 7.4 (Polinomio Característico). . *Al polinomio $p(\lambda)$ de la nota anterior lo llamamos el Polinomio Característico de la matriz A.*

Como los vectores propios de A son los vectores $\vec{v} \neq \vec{0}$ que satisfacen la ecuación vectorial

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

y como $p(\lambda) = 0$, tiene a lo sumo n raíces, entonces existen a lo sumo n valores propios de A y por tanto existen a lo sumo n vectores propios linealmente independientes.

El siguiente teorema se demuestra en los cursos de Algebra Lineal.

Teorema 7.2.

Cualesquiera k vectores propios $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ correspondientes a k valores propios diferentes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ respectivamente, son linealmente independientes.

Pasos para hallar los valores y vectores propios de A:

- Hallar $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$.
- Hallar las raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $p(\lambda) = 0$.
- Para cada valor propio λ_i, resolver el sistema homogéneo

$$(A - \lambda_i I)\,\vec{v} = \vec{0}.$$

Ejemplo 2. Hallar tres soluciones linealmente independientes, una matriz fundamental y la solución general del siguiente sistema:

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Solución: el polinomio característico es

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6) =$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$$

luego los valores propios son: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Hallemos los vectores propios:
Para $\lambda_1 = 1$, tenemos que

$$(A{-}1.I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 1-1 & -1 & 4 \\ 3 & 2-1 & -1 \\ 2 & 1 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

escalonemos la matriz de coeficientes por reducción de filas

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{31}(1)]{R_{21}(1)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3(\frac{1}{2})]{R_2(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego $v_2 = 4v_3, \;\; v_1 = -v_3, \;\; v_3 = v_3$, por lo tanto

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{x}_1 = e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t \\ 4e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -2$, tenemos que

$$(A{+}2.I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 1+2 & -1 & 4 \\ 3 & 2+2 & -1 \\ 2 & 1 & -1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

escalonemos la matriz de coeficientes por reducción de filas

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{31}(1)]{R_{21}(4)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 15 & 0 & 15 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3(\frac{1}{5})]{R_2(\frac{1}{15})} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{32}(-1)]{R_{12}(-4)} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego $v_2 = -v_1, \;\; v_3 = -v_1, \;\; v_1 = v_1$, por lo tanto

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{x}_2 = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 3$, tenemos que

$$(A-3.I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 1-3 & -1 & 4 \\ 3 & 2-3 & -1 \\ 2 & 1 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

escalonemos la matriz de coeficientes por reducción de filas

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{31}(1)]{R_{21}(-1)} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2(\frac{1}{5})} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}(4)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego $v_2 = 2v_1, \;\; v_3 = v_1, \;\; v_1 = v_1$, por lo tanto

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_3 = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

Las tres soluciones son $\vec{x}_1, \; \vec{x}_2, \; \vec{x}_3$, como los tres valores propios son diferentes entonces $\vec{x}_1, \; \vec{x}_2, \; \vec{x}_3$ son linealmente independientes, o sea que la matriz fundamental es

$$\Phi(t) = [\vec{x}_1, \; \vec{x}_2, \; \vec{x}_3] = \begin{bmatrix} -e^t & e^{-2t} & e^{3t} \\ 4e^t & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ e^t & -e^{-2t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

La solución general es

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) + C_3\vec{x}_3(t) = \Phi(t) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = [\vec{x}_1, \; \vec{x}_2, \; \vec{x}_3] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

RAÍCES COMPLEJAS.

Si $\lambda = \alpha + i\beta$ es un valor propio o característico de A con vector propio asociado $\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$, entonces $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\,\vec{v}$ es una solución vectorial compleja de $\vec{x}\,' = A\,\vec{x}$.

La solución vectorial compleja da lugar a dos soluciones vectoriales reales, en efecto:

Lema 7.1.

Sea $\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + i\vec{x}_2(t)$ una solución vectorial compleja de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, entonces $\vec{x}_1(t)$ y $\vec{x}_2(t)$ son soluciones vectoriales reales de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Demostración: como $\vec{x}(t)$ es solución de $\vec{x}\,' = A\,\vec{x}$ entonces

$$\vec{x}_1\,'(t) + i\vec{x}_2\,'(t) = A(\vec{x}_1(t) + i\vec{x}_2(t)) = A\vec{x}_1(t) + iA\vec{x}_2(t)$$

e igualando parte Real y parte Imaginaria:

$$\vec{x}_1\,' = A\,\vec{x}_1 \quad \text{y} \quad \vec{x}_2\,' = A\,\vec{x}_2,$$

o sea que $\vec{x}_1(t)$ y $\vec{x}_2(t)$ son soluciones. ■

Obsérvese que $\vec{x}_1(t) = \mathbf{R_e}\{\vec{x}(t)\}$ $\qquad \vec{x}_2(t) = \mathbf{Im}\{\vec{x}(t)\}$

NOTA: si $\lambda = \alpha + i\beta$ es un valor propio complejo y $\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$ es un vector propio complejo asociado a λ entonces

$$\begin{aligned}\vec{x} = e^{\lambda t}\vec{v} &= e^{(\alpha+i\beta)t}\,(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\,\mathrm{sen}\,\beta t)(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2)\\ &= e^{\alpha t}[\vec{v}_1\cos\beta t - \vec{v}_2\,\mathrm{sen}\,\beta t + i(\vec{v}_1\,\mathrm{sen}\,\beta t + \vec{v}_2\cos\beta t)]\end{aligned}$$

Por tanto si $\lambda = \alpha + i\beta$ es un valor propio de A con vector propio $\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$, entonces

$$\vec{x}_1 = e^{\alpha t}(\vec{v}_1\cos\beta t - \vec{v}_2\,\mathrm{sen}\,\beta t), \quad \vec{x}_2 = e^{\alpha t}(\vec{v}_1\,\mathrm{sen}\,\beta t + \vec{v}_2\cos\beta t) \tag{7.12}$$

son dos soluciones vectoriales reales de $\vec{x}'(t) = Ax$ y son linealmente independientes.

Ejemplo 3. Hallar dos soluciones vectoriales reales linealmente independientes del siguiente sistema: $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 12 & -17 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\vec{x}$

Solución: hallemos el polinomio característico

$$p(\lambda) = \begin{bmatrix} 12-\lambda & -17 \\ 4 & -4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$$

los valores propios son $\lambda_1 = 4 + 2i$, $\lambda_2 = 4 - 2i$,por tanto $\alpha = 4$, $\beta = 2$.

Si $\lambda_1 = 4 + 2i$ entonces

$$\begin{bmatrix} 8-2i & -17 \\ 4 & -8-2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(8-2i)v_1 - 17v_2 = 0 \quad \text{y} \quad 4v_1 + (-8-2i)v_2 = 0$$

Universidad de Antioquia, Depto de Matematicas

como estas dos ecuaciones son linealmente dependientes, se toma una cualquiera de las dos, por ejemplo la primera

$$v_2 = \frac{1}{17}(8-2i)v_1, \quad v_1 = v_1 \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{17}(8-2i) \end{bmatrix} v_1$$

tomando $v_1 = 17$ tenemos $\vec{v} = \begin{bmatrix} 17 \\ 8-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

escogemos como $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

Por lo tanto las dos soluciones vectoriales reales son:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= e^{\alpha t}\left(\vec{v}_1 \cos\beta t - \vec{v}_2 \operatorname{sen}\beta t\right) = e^{4t}\left(\begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 2t\right) \\ &= e^{4t}\begin{bmatrix} 17\cos 2t \\ 8\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \vec{x}_2(t) &= e^{\alpha t}\left(\vec{v}_1 \operatorname{sen}\beta t + \vec{v}_2 \cos\beta t\right) = e^{4t}\left(\begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 2t + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cos 2t\right) \\ &= e^{2t}\begin{bmatrix} 17\operatorname{sen} 2t \\ 8\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nota: si se utiliza el otro valor propio $\lambda_2 = 4-2i$ y se sigue el mismo procedimiento se llega a que

$$\vec{x}_1(t) = e^{4t}\begin{bmatrix} 17\cos 2t \\ 8\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = e^{4t}\begin{bmatrix} 17\operatorname{sen} 2t \\ 8\operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t \end{bmatrix}$$

que también son dos soluciones linealmente independientes de la E.D., es decir, que de acuerdo a la selección que hagamos ya sea en los valores propios o en las ecuaciones lineales cuando escalonemos la matriz de coeficientes, tendremos respuestas diferentes, esto se debe a que escogemos vectores base $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ diferentes.

RAÍCES IGUALES.

La matriz e^{At} que definimos a continuación, cuya existencia esta demostrada en el Apéndice A.3 .

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Definición 7.5 (**Matriz exponencial**). *Si A es una matriz $n \times n$ y constante*

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^n}{n!}A^n + \ldots$$

Esta serie es convergente para todo t y para toda matriz $A_{n\times n}$ constante. Derivando formalmente (Ver la demostración de la derivada en el Apéndice A.4), tenemos

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A + A^2 t + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \ldots$$

$$= A\left(I + At + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \ldots\right) = Ae^{At}$$

Por tanto, $e^{At}\,\vec{v}$ es una solución de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, donde $\vec{v}$ es un vector constante. En efecto

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(e^{At}\,\vec{v})}_{\vec{x}} = Ae^{At}\vec{v} = A\underbrace{(e^{At}\,\vec{v})}_{\vec{x}}$$

También en el Apéndice se demuestran las siguientes propiedades.

Propiedades:

i). $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

ii). $e^{A(t+s)} = e^{At}\,e^{As}$

iii). Si $AB = BA$, donde $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$, entonces $e^{At+Bt} = e^{At}\,e^{Bt}$

Observación:

$$e^{At}\,\vec{v} = e^{At-\lambda It+\lambda It}\vec{v} = e^{(A-\lambda I)t}e^{\lambda It}\vec{v} \tag{7.13}$$

$$\text{Ya que} \quad (A-\lambda I)\lambda I = (\lambda I)(A-\lambda I)$$

$$\text{Pero} \quad e^{\lambda It}\vec{v} = \left[I + \lambda It + (\lambda I)^2\frac{t^2}{2!} + \ldots\right]\vec{v}$$

$$= \left[1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \ldots\right]I\vec{v} = e^{\lambda t}\vec{v}$$

sustituyendo en (7.13)

$$e^{At}\vec{v} = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}\vec{v} \tag{7.14}$$

Universidad de Antioquia, Dep. de Matematicas

Si $\vec{v}$ satisface $(A-\lambda I)^m\vec{v}=\vec{0}$ para algún entero m, entonces la serie infinita de $e^{(A-\lambda I)\,t}$ termina después de m términos; en efecto,

$$(A-\lambda I)^{m+e}\vec{v}=(A-\lambda I)^e(A-\lambda I)^m\vec{v}=\vec{0}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} e^{(A-\lambda I)t}\vec{v} &= \left[I+(A-\lambda I)t+(A-\lambda I)\,\frac{t^2}{2!}+\ldots+(A-\lambda I)^{m-1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right]\vec{v} \\ &= \vec{v}+t(A-\lambda I)\vec{v}+\frac{t^2}{2!}\,(A-\lambda I)^2\vec{v}+\ldots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\,(A-\lambda I)^{m-1}\,\vec{v} \end{aligned}$$

en (7.14):

$$\begin{aligned} e^{At}\vec{v}=e^{\lambda t}[\vec{v}+t(A-\lambda I)\vec{v} \\ +\frac{t^2}{2!}\,(A-\lambda I)^2\,\vec{v}+\ldots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\,(A-\lambda I)^{m-1}\,\vec{v}] \end{aligned} \quad (7.15)$$

Algoritmo para hallar las n soluciones linealmente independientes

1. Hallar los valores y vectores propios de la matriz A. Si A tiene n vectores propios linealmente independientes entonces $\vec{x}'=A\,\vec{x}$ tiene n soluciones linealmente independientes de la forma $e^{\lambda t}\vec{v}$.

2. Si A tiene $k<n$ vectores propios linealmente independientes, entonces se tienen k soluciones linealmente independientes de la forma $e^{\lambda t}\vec{v}$. Para encontrar las soluciones adicionales se toma un valor propio λ de A y se hallan todos los vectores $\vec{v}$ tales que

   $$(A-\lambda I)^2\vec{v}=\vec{0} \quad \text{y} \quad (A-\lambda I)\vec{v}\neq\vec{0}.$$

   Para cada uno de estos vectores $\vec{v}$

   $$e^{At}\vec{v}=e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}\vec{v}=e^{\lambda t}[\vec{v}+t(A-\lambda I)\vec{v}]$$

   es una solución adicional de $\vec{x}'=A\,\vec{x}$. Esto se hace para todos los valores propios de A.

Universidad de Antioquia Depto. de Matemáticas

3. Si aún en el paso anterior no se han conseguido las n soluciones linealmente independientes, entonces se buscan los vectores $\vec{v}$ tales que

$$(A-\lambda I)^3\vec{v}=\vec{0} \quad \text{y} \quad (A-\lambda I)^2\vec{v}\neq\vec{0}$$

por lo tanto

$$e^{At}\vec{v}=e^{\lambda t}[\vec{v}+t(A-\lambda I)\vec{v}+\frac{t^2}{2}(A-\lambda I)^2\vec{v}]$$

es una nueva solución linealmente independiente de $\vec{x}\,'=A\,\vec{x}$.

4. Se continua de la misma manera hasta completar n soluciones linealmente independientes.

Ejemplo 4. Resolver por el método anterior el problema de valor inicial

$$\vec{x}\,'=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&2&-1\\0&0&2\end{bmatrix}\vec{x} \qquad \vec{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$$

Solución: el polinomio característico de

$$A=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&2&-1\\0&0&2\end{bmatrix} \quad \text{es} \quad p(\lambda)=(2-\lambda)^3$$

luego $\lambda=2$ es un valor propio de A con multiplicidad 3.
Hallemos los vectores propios asociados a $\lambda=2$, estos vectores deben satisfacer la ecuación

$$(A-2I)\vec{v}=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

escalonemos la matriz de coeficientes por reducción de filas

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_{12}(2)}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

luego $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ y $v_1 = v_1$, por lo tanto el vector propio asociado a $\lambda = 2$ es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

la solución asociada a este vector propio es

$$\vec{x_1}(t) = e^{2t}\vec{v} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

luego la dimensión del espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$ es uno, esto quiere decir que debemos hallar un vector $\vec{v}$ tal que

$$(A - 2I)^2\vec{v} = \vec{0} \quad \text{y} \quad (A - 2I)\vec{v} \neq \vec{0}$$

$$(A - 2I)^2\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir $v_3 = 0$, v_1 y v_2 son parámetros; elegimos $v_1 = 0$ y $v_2 = 1$ de tal manera que el vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sea linealmente independiente con el vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ hallado anteriormente

La solución asociada a $\vec{v}$ es

$$\begin{aligned} \vec{x_2}(t) &= e^{\lambda t}[\vec{v} + t(A - \lambda I)\vec{v}] = e^{2t}[\vec{v} + t(A - 2I)\vec{v}] \\ &= e^{2t}[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}] = e^{2t}[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}] = e^{2t}\begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

como $(A - 2I)^2\vec{v} = \vec{0}$ tiene dos soluciones linealmente independientes

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Universidad de Antioquia. Depto. de Matematicas

se debe buscar otra solución linealmente independiente con las anteriores, que cumpla la condición

$$(A-2I)^3\vec{v}=\vec{0} \qquad \text{y} \qquad (A-2I)^2\vec{v}\neq\vec{0}$$

$$(A-2I)^3\vec{v}=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}^3\vec{v}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

luego v_1, v_2 y v_3 son parámetros, entonces escogemos $\vec{v}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ de tal manera que sea linealmente independiente con $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ y que además cumpla $(A-2I)^2\vec{v}\neq\vec{0}$.

Como el sistema es 3×3, entonces la última solución es

$$\vec{x_3}(t)=e^{\lambda t}[\vec{v}+t(A-\lambda I)\vec{v}+\frac{t^2}{2}(A-\lambda I)^2\vec{v}]=e^{2t}[\vec{v}+t(A-2I)\vec{v}+\frac{t^2}{2}(A-2I)^2\vec{v}]$$

$$=e^{2t}[\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}]$$

$$=e^{2t}[\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}]=e^{2t}[\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}]$$

$$=e^{2t}\begin{bmatrix}2t-\frac{t^2}{2}\\-t\\1\end{bmatrix}$$

La solución general es

$$\vec{x}(t)=C_1\vec{x_1}(t)+C_2\vec{x_2}(t)+C_3\vec{x_3}(t)=C_1e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+C_2e^{2t}\begin{bmatrix}t\\1\\0\end{bmatrix}+C_3e^{2t}\begin{bmatrix}2t-\frac{t^2}{2}\\-t\\1\end{bmatrix}$$

en $t=0$ se tiene que

$$\vec{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+C_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

luego $C_1 = 1$, $C_2 = 3$ y $C_3 = 1$

La solución particular buscada es

$$\vec{x}(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 + 5t - \frac{t^2}{2} \\ 3 - t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nota: en algunos casos el valor propio repetido λ de multiplicidad m puede producir m vectores propios, en otros casos (como en el ejemplo anterior) puede producir menos de m vectores propios, teniéndose que completar el resto (hasta completar m) con los que llamaremos vectores propios generalizados.

Definición 7.6 (Valor propio defectuoso). *Un valor propio λ de multiplicidad $m > 1$ se le llama* **defectuoso** *si produce menos de m vectores propios linealmente independientes. Si λ tiene $p < m$ vectores propios linealmente independientes, al número $d = m - p$ de vectores propios faltantes se le llama el defecto del valor propio defectuoso λ*

En el ejemplo anterior $\lambda = 2$ tiene multiplicidad $m = 3$ y solo produjo $p = 1$ vector propio, al número $d = m - p = 3 - 1 = 2$ de vectores propios faltantes se le llama el defecto del valor propio $\lambda = 2$, los dos vectores propios faltantes se consiguen con vectores propios generalizados.

Observaciones.

1. Si λ es un valor propio de la matriz A, denominamos vector propio generalizado de rango m asociado a λ, al vector $\vec{v}$ tal que

$$(A - \lambda I)^m \vec{v} = \vec{0} \quad \text{y} \quad (A - \lambda I)^{m-1} \vec{v} \neq \vec{0}$$

   Cuando $m = 1$, el vector $\vec{v}$ es un vector propio generalizado de rango uno y es también un vector propio ordinario; cuando $m = 2$, el vector $\vec{v}$ es un vector propio generalizado de rango dos, pero no es un vector propio ordinario.

   Una cadena de longitud m de vectores propios generalizados originados en el vector propio $\vec{v_1}$ es un conjunto de m vectores propios generaliza-

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

dos $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}$ tales que

$$\begin{aligned} (A-\lambda I)\vec{v}_m &= \vec{v}_{m-1} \\ (A-\lambda I)\vec{v}_{m-1} &= \vec{v}_{m-2} \\ &\vdots \\ (A-\lambda I)\vec{v}_2 &= \vec{v}_1 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Si sustituimos $\vec{v}_{m-1}$ en la segunda expresión de (7.16) y luego $\vec{v}_{m-2}$ en la tercera expresión y así sucesivamente, tenemos que

$$(A-\lambda I)^{m-1}\vec{v}_m = \vec{v}_1, \tag{7.17}$$

y como $\vec{v}_1$ es un vector propio ordinario, entonces premultiplicando (7.17) por $(A-\lambda I)$ se llega a que

$$(A-\lambda I)^m\vec{v}_m = (A-\lambda I)\vec{v}_1 = \vec{0}$$

en general para $j = 1, \ldots, m-1$:

$$(A-\lambda I)^j\vec{v}_m = \vec{v}_{m-j} \tag{7.18}$$

Utilizando (7.18) se puede mostrar que la cadena $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, para ello suponemos que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{v}_m = \vec{0}$$

se premultiplica por $(A-\lambda I)^{m-1}$ y se llega a que $\alpha_m = 0$, en forma similar se demuestra que $\alpha_{m-1} = 0$ y así sucesivamente hasta mostrar que $\alpha_1 = 0$

2. Utilizando (7.15) tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) = e^{\lambda t}[&\vec{v}_m + t(A-\lambda I)\vec{v}_m + \\ &\frac{t^2}{2!}(A-\lambda I)^2\vec{v}_m + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda I)^{m-1}\vec{v}_m] \end{aligned} \tag{7.19}$$

donde $\vec{v}_m$ satisface $(A-\lambda I)^m\vec{v}_m = \vec{0}$ y $(A-\lambda I)^{m-1}\vec{v}_m = \vec{v}_1 \neq \vec{0}$ y por (7.18)

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_m + t\vec{v}_{m-1} + \frac{t^2}{2!}\vec{v}_{m-2} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\vec{v}_1] \tag{7.20}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Algoritmo para una cadena de longitud m

a. Hallar $\vec{v}_1$ vector propio de A asociado al valor propio λ que satisface el sistema: $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

b. Hallar $\vec{v}_2$ tal que $(A - \lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

c. Hallar $\vec{v}_m$ tal que $(A - \lambda I)\vec{v}_m = \vec{v}_{m-1}$.

d. La solución asociada a esta cadena es

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_m + t\vec{v}_{m-1} + \frac{t^2}{2!}\,\vec{v}_{m-2} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\,\vec{v}_1]$$

3. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y \\ y' &= a_2 x + b_2 y \end{aligned} \tag{7.21}$$

luego su ecuación característica es

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{bmatrix} &= (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1 \\ &= \lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \end{aligned} \tag{7.22}$$

y supongamos que tiene una raíz $\lambda = m$ con multiplicidad dos. Supongamos también que

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

es el vector propio asociado a $\lambda = m$ y que

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$$

es el vector propio generalizado de rango dos, asociado al valor propio $\lambda = m$, es decir

$$(A - mI)^2\vec{v}_2 = \vec{0} \qquad \text{y} \qquad (A - mI)\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \neq \vec{0}$$

Por tanto las dos soluciones linealmente independientes son

$$\vec{x}_1(t) = e^{mt}\vec{v}_1 = e^{mt}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

y por (7.20) la segunda solución es

$$\vec{x}_2(t) = e^{mt}[\vec{v}_2 + t\vec{v}_1] = e^{mt}[\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}] = e^{mt} \begin{bmatrix} A_1 + At \\ B_1 + Bt \end{bmatrix},$$

la solución general es

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) \\ &= C_1 e^{mt} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + C_2 e^{mt} \begin{bmatrix} A_1 + At \\ B_1 + Bt \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.23}$$

finalmente

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 A e^{mt} + C_2(A_1 + At)e^{mt} \\ y(t) &= C_1 B e^{mt} + C_2(B_1 + Bt)e^{mt} \end{aligned} \tag{7.24}$$

Teorema 7.3.

La matriz $X(t)_{n\times n}$ es una matriz fundamental de la E.D. vectorial $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ si y solo si satisface la E.D. matricial $X'(t) = AX(t)$ y además $\det X(t_0) \neq 0$.

Demostración: sea $X(t) = [\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)]$ una matriz fundamental de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, entonces

$$\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$$

son linealmente independientes y por tanto $\det X(t_0) \neq 0$.

Derivando la matriz $X(t)$, tenemos

$$X'(t) = [\vec{x}\,'_1(t), \vec{x}\,'_2(t), \ldots, \vec{x}\,'_n(t)]$$

y como

$$AX(t) = [A\vec{x}_1(t), A\vec{x}_2(t), \ldots, A\vec{x}_n(t)]$$

y sabiendo que

$$A\vec{x}_1(t) = \vec{x}\,'_1(t), \quad A\vec{x}_2(t) = \vec{x}\,'_2(t), \ldots, A\vec{x}_n(t) = \vec{x}\,'_n(t)$$

entonces

$$X'(t) = [A\vec{x}_1(t), A\vec{x}_2(t), \ldots, A\vec{x}_n(t)] = AX(t)$$

Universidad de Antioquia Depto. de Matematicas

luego $X(t)$ es solucion de la E.D. matricial

$$X' = AX$$

Recíprocamente como $\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)$ son linealmente independientes, ya que $\det X(t_0) \neq 0$; entonces por la nota ii. hecha en la página 96 del Cap. IV, tenemos que

$$\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t) \quad \text{son linealmente independientes}$$

luego la matriz

$$X(t) = [\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t)]$$

es una matriz fundamental. ■

Teorema 7.4.

La matriz e^{At} es una matriz principal de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$.

Demostración: en efecto, e^{At} es solución de $X' = AX$ ya que

$$\frac{d}{dt}\, e^{At} = A\, e^{At}$$

y por el teorema anterior e^{At} es una matriz fundamental, además,

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + \ldots,$$

y para $t = 0$ se tiene que $e^{A0} = I$. ■

Teorema 7.5.

Sean $X(t)$ y $Y(t)$ dos matrices fundamentales de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, entonces existe una matriz constante $C_{n\times n}$ tal que $Y(t) = X(t)C$.

Demostración: como

$$X(t) = [\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)] \quad \text{es fundamental}$$

entonces $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ son linealmente independientes. Similarmente como

$$Y(t) = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n] \quad \text{es fundamental}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

entonces $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ son linealmente independientes.
Como $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ es una base, entonces cada y_i se puede expresar como una combinación lineal de esta base, es decir,

$$\vec{y}_i = C_{1i}\,\vec{x}_1 + \ldots + C_{ni}\,\vec{x}_n = [\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)] \begin{bmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \\ \vdots \\ C_{ni} \end{bmatrix}$$

para $i = 1, \ldots, n$, luego

$$Y(t) = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n] = [\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)] \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} = X\, C_{n\times n}$$

donde

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

■

El siguiente teorema nos permite hallar una matriz exponencial, conociendo una matriz fundamental.

Teorema 7.6.

Sea $X(t)$ una matriz fundamental de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ entonces

$$e^{At} = X(t)\,X^{-1}(0).$$

Demostración: sea $X(t)$ una matriz fundamental y como e^{At} es matriz fundamental (principal), entonces, existe

$$C_{n\times n} \quad \text{tal que} \quad e^{At} = X(t)C$$

Para $t = 0 \Rightarrow e^{0t} = I = X(0)C \Rightarrow C = X^{-1}(0)$. Luego $e^{At} = X(t)\,X^{-1}(0)$.

■

Ejemplo 5. Hallar e^{At} para

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Universidad de Antioquia. Depto. de Matemáticas

Solución:
Hallamos los valores propios, que en este caso son: $\lambda = 1,\ \lambda = 3,\ \lambda = 5$

$$\text{Para } \lambda = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } \lambda = 3 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_2(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } \lambda = 5 \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_3(t) = e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ 2e^{5t} \end{bmatrix}$$

y por Teorema 7.2 $\vec{x}_1(t)$, $\vec{x}_2(t)$, $\vec{x}_3(t)$ son linealmente independientes.
Luego $X(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{bmatrix}$ es la matriz fundamental.

$$\text{Luego } X(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} e^{At} = X(t)\,X^{-1}(0) &= \begin{bmatrix} e^t & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t & -\frac{e^t}{2} + \frac{e^{3t}}{2} & -\frac{e^{3t}}{2} + \frac{e^{5t}}{2} \\ 0 & e^{3t} & -e^{3t} + e^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicios. En los siguientes ejercicios, hallar la solución general para $\vec{x}\,' = A\,\vec{x}$ y con el Wronskiano comprobar que los vectores solución son linealmente independientes.

1. $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

(**Rta.:** $\vec{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-4t}$)

2. $A = \begin{bmatrix} 12 & -15 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

(**Rta.:** $\vec{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} e^{6t}$)

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

(**Rta.:** $\vec{x}(t) = C_1[\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 2t] + C_2[\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 2t]$)

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(**Rta.:** $\vec{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + C_2 e^t[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 2t]$

$+ C_3 e^t[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 2t]$)

5. $\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \vec{x}$

(**Rta.:** $\lambda = -3$(mult.2),vector propio $\vec{v} = [1 - 1]^T$, $x_1(t) = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{-3t}, x_2(t) = (-C_1 - C_2 t)e^{-3t}$)

6. $\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$

(**Rta.:** $\lambda = -1$(mult.3) defectuoso, $x_1(t) = (-2C_2 + C_3 - 2C_3 t)e^{-t}, x_2(t) = (C_1 - C_2 + C_2 t - C_3 t + \frac{1}{2} C_3 t^2)e^{-t}, x_3(t) = (C_2 + C_3 t)e^{-t}$)

7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

(**Rta.:** $\vec{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ -4t \end{bmatrix} e^{2t}$)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

7.4. VARIACIÓN DE PARÁMETROS

En el capítulo 4. vimos que la solución general de una E.D. lineal no homogénea tenía dos partes que eran x_h y x_p y la solución general era $x(t) = x_h + x_p$. Lo mismo nos sucede cuando tenemos una E.D. lineal vectorial no homogénea $\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{f}(t)$, su solución general es de la forma $\vec{x} = \vec{x_h} + \vec{x_p}$, donde $\vec{x_h}$ es la solución a la homogénea asociada $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ y esta expresada por

$$\vec{x_h} = c_1\vec{x_1} + c_2\vec{x_2} + \cdots + c_n\vec{x_n}$$

El objetivo en esta sección es hallar la solución particular $\vec{x_p}$ de la ecuación no homogénea, para ello utilizamos el método de varación de parámetros, de la misma manera como lo hicimos en el capítulo 4.

Consideremos la E.D. vectorial no homogénea:

$$\vec{x}\,' \;=\; A\vec{x} + \vec{f}(t). \tag{7.25}$$

Sean $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ las soluciones linealmente independientes de la homogénea asociada, o sea que

$$\vec{x}_h(t) = C_1\vec{x}_1(t) + \ldots + C_n\vec{x}_n(t) = [\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}] \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = X(t)\vec{C}$$

y variando los parámetros $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tenemos

$$\vec{x}(t) = u_1(t)\vec{x}_1(t) + \ldots + u_n(t)\vec{x}_n(t) = [\vec{x_1}(t), \vec{x_2}(t), \cdots, \vec{x_n}(t)] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} = X\vec{u},$$

la cual suponemos que es una solución de $\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{f}(t)$.

Luego , $\vec{x}(t) = X(t)\vec{u}(t)$, donde

$$X(t) = [\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)] \quad \text{y } \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

Como

$$\vec{x}\,'(t) \;=\; \frac{d}{dt}\left(X(t)\vec{u}(t)\right) = X'(t)\vec{u}(t) + X(t)\vec{u}\,'(t),$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemática

$$A\vec{x} + \vec{f}(t) \quad = \quad \underbrace{AX(t)}_{X'}\vec{u}(t) + \vec{f}(t) = X'(t)\vec{u}(t) + \vec{f}(t)$$

Sustituimos en (7.25) y cancelando, obtenemos:

$$X(t)\vec{u}\,'(t) = \vec{f}(t)$$

Premultiplicando por $X^{-1}(t) : \vec{u}\,'(t) = X^{-1}(t)\vec{f}(t)$

$$\vec{u}(t) \quad = \quad \int X^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\,dt + \vec{C}, \quad \text{donde } \vec{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \tag{7.26}$$

luego

$$\vec{x}(t) = X\vec{u} = X(t)\left[\int X^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\,dt + \vec{C}\right] = X(t)\int X^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\,dt + X(t)\vec{C}$$

como $\vec{x}_h(t) = X(t)\vec{C}$, entonces

$$\vec{x_p} = X(t)\int X^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\,dt$$

y la solución general es

$$\vec{x} = \vec{x_h} + \vec{x_p} = X(t)\vec{C} + X(t)\int X^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\,dt$$

Para resolver el problema de valor inicial:

$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$ con $\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}$, como

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 = X(t_0)\vec{C} + X(t_0)\int X^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\,dt\Big|_{t=t_0}$$

despejando $\vec{C} = X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 - \int X^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\,dt\Big|_{t=t_0}$ y sustituyendo en la solución general

$$\vec{x} = X(t)\left(X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 - \int X^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\,dt\Big|_{t=t_0}\right) + X(t)\int X^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\,dt =$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 - X(t)\int X^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\,dt\Big|_{t=t_0} + X(t)\int X^{-1}(t)\,\vec{f}(t)\,dt\Big|_{t} =$$

$$= X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\vec{f}(s)\,ds$$

en resumen, la solución al problema de valor inicial es

$$\vec{x}(t) \;=\; X(t)\,X^{-1}(t_0)\,\vec{x_0} + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\vec{f}(s)\,ds \tag{7.27}$$

En particular si

$$X(t) = e^{At} \Rightarrow X^{-1}(t) = e^{-At} \Rightarrow X^{-1}(t_0) = e^{-At_0}$$

entonces

$$\vec{x}(t) = e^{At}\,e^{-At_0}\,\vec{x_0} + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}\,\vec{f}(s)\,ds$$

o sea que

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\,\vec{f}(s)\,ds \tag{7.28}$$

Ejemplo 6. Utilizar (7.27) para resolver el sistema:

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{bmatrix},\; \vec{x(0)} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

<u>Solución</u>: para resolver este ejercicio, utilizaremos el siguiente resultado del álgebra lineal: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Los valores propios de la matriz A son: $\lambda = 3,\ \lambda = 4$

Los vectores propios linealmente independientes son:

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Las soluciones vectoriales linealmente independientes son:

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$\vec{x_1}(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix},\ \vec{x_2}(t) = e^{4t}\,\vec{v_2} = e^{4t}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{bmatrix}$$

Luego la matriz fundamental y su inversa en términos de s son:

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix}, \quad X^{-1}(s) = \begin{bmatrix} -2e^{-3s} & 3e^{-3s} \\ e^{-4s} & -e^{-4s} \end{bmatrix}$$

Pasos: a) hallemos:

$$\begin{aligned}
X(t)\int_{t_0=0}^{t} X^{-1}(s)\,\vec{f}(s)\,ds &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} -2e^{-3s} & 3e^{-3s} \\ e^{-4s} & -e^{-4s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{5s} \\ 4 \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} -2e^{2s} + 12e^{-3s} \\ e^{s} - 4e^{-4s} \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -e^{2t} - 4e^{-3t} + 5 \\ e^{t} + e^{-4t} - 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 + 5e^{3t} - 6e^{4t} \\ e^{5t} - 2 + 5e^{3t} - 4e^{4t} \end{bmatrix} \\
&= 5\begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 \\ e^{5t} - 2 \end{bmatrix} \\
&= 5\vec{x_1}(t) - 2\vec{x_2}(t) + \vec{x_p}
\end{aligned}$$

Luego la solución particular es

$$\vec{x_p} = \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 \\ e^{5t} - 2 \end{bmatrix}$$

b) Hallemos $X(t)\,X^{-1}(0)\vec{x_0}$

$$\begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6e^{3t} + 15e^{4t} \\ -6e^{3t} + 10e^{4t} \end{bmatrix}$$

De a) y b):

$$\vec{x}(t) = X(t)\,X^{-1}(0)\,\vec{x_0} + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)\,\vec{f}(s)\,ds =$$

$$= \begin{bmatrix} -6e^{3t} + 15e^{4t} \\ -6e^{3t} + 10e^{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 + 5e^{3t} - 6e^{4t} \\ e^{5t} - 2 + 5e^{3t} - 4e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{3t} + 9e^{4t} + 2e^{5t} - 1 \\ -e^{3t} + 6e^{4t} + e^{5t} - 2 \end{bmatrix}$$

Universidad de Antioquia. Depto. de Matemáticas

Ejercicios.

1. Hallar la solución particular del siguiente sistema:
$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 2t \\ 3 \end{bmatrix}$.
(**Rta.:** $\vec{x}(t) = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 666 - 120t - 575e^{-t} - 91e^{5t} \\ 588 - 60t - 575e^{-t} - 13e^{5t} \end{bmatrix}$)

2. Hallar la solución particular del siguiente sistema:
$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t}\cos 2t \end{bmatrix}$.
(**Rta.:**$\vec{x}(t) = \frac{1}{4} e^{3t} \begin{bmatrix} -2t \operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t + 2t\cos 2t \end{bmatrix}$)

3. Hallar la solución general del siguiente sistema:
$x' = 4y + 1, \qquad y' = -x + 2$
(**Rta.:** $x = -2C_1 \cos 2t + 2C_2 \operatorname{sen} 2t + 2; \quad y = C_2 \cos 2t + C_1 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{4}$)

4. Hallar la solución general del siguiente sistema:
$x' = -y + t, \qquad y' = x - t$
(**Rta.:** $x = C_1 \cos t - C_2 \operatorname{sen} t + 1 + t; \quad y = C_2 \cos t + C_1 \operatorname{sen} t - 1 + t$)

5. Sean $\vec{\varphi}_1(t)$ una solución de $\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{b}_1(t)$, $\vec{\varphi}_2(t)$ una solución de $\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{b}_2(t), \cdots$, $\vec{\varphi}_n(t)$ una solución de $\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{b}_n(t)$. Demostrar que

$$\vec{\varphi}_1(t) + \vec{\varphi}_2(t) + \cdots + \vec{\varphi}_n(t)$$

es una solución de

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{b}_1(t) + \vec{b}_2(t) + \cdots + \vec{b}_n(t).$$

A este resultado también se le llama principio de superposición.

6. Sea $\vec{b}(t) = \sum_{k=1}^{m} \vec{b}_k e^{i\beta_k t}$. (o sea una suma finita de entradas periódicas). Suponga que $i\beta_k$ no es raíz de la ecuación característica de A para $k = 1, 2, \cdots, m$. Usar el principio de superposición del ejercicio anterior para mostrar que la solución $\vec{x}(t)$ de la ecuación $\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ se puede escribir en la forma

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{m} \vec{x}_k e^{i\beta_k t}.$$

Universidad de Antioquia, Depto de Matematicas

7. Si las ecuaciones del movimiento de una partícula de masa m que se mueve en el plano XY son

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t,x,y), \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = g(t,x,y)$$

donde f y g son las componentes en x y y de la fuerza que actúa sobre la partícula. Reemplazar este sistema de dos ecuaciones de segundo orden por un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden. (Sugerencia: haga $x = x$, $y = y$, $x' = v_x$, $y' = v_y$, donde v_x y v_y son las componentes en x y en y de la velocidad).

7.5. TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA SISTEMAS

Definición 7.7. Si

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \pounds\{\vec{x}(t)\}(s) \overset{def.}{=} \vec{X}(s) = \begin{bmatrix} \int_0^\infty e^{-st}x_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_0^\infty e^{-st}x_n(t)\,dt \end{bmatrix}$$

Y si

$$\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{F}(s) = \pounds\{\vec{f}(t)\}(s) = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^\infty e^{-st}f_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_0^\infty e^{-st}f_n(t)\,dt \end{bmatrix}$$

Sea el P.V.I. $\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$, $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$. Luego

$$\begin{aligned} \pounds\{\vec{x}\,'(t)\}(s) &= \pounds\{A\vec{x}(t) + \vec{f}(t)\} \\ &= A\pounds\{\vec{x}(t)\}(s) + \pounds\{\vec{f}(t)\}(s) \\ &= A\vec{X}(s) + \vec{F}(s) \end{aligned} \tag{7.29}$$

Pero $\pounds\{\vec{x}\,'(t)\} = \begin{bmatrix} \pounds\{x_1{}'\}(s) \\ \vdots \\ \pounds\{x_n{}'\}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sX_1(s) - x_1(0) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0) \end{bmatrix} = s\vec{X}(s) - \vec{x}(0)$

en (7.29): $s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) = A\vec{X}(s) + \vec{F}(s)$
Luego $(sI - A)\,\vec{X}(s) = \vec{x}(0) + \vec{F}(s) = \vec{x}_0 + \vec{F}(s)$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejemplo 7. Resolver el problema de valor inicial.

$$
\begin{aligned}
\vec{x}\,' &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\pounds\{\vec{x}\,'\}(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \pounds\{\vec{x}\}(s) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \pounds\{e^t\}(s) \\
s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{X}(s) + \frac{1}{s-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\left(sI - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \vec{X}(s) &= \vec{x}(0) + \frac{1}{s-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} s-1 & -4 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{s-1} \\ 1 + \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow (s-1)X_1(s) - 4X_2(s) = 2 + \frac{1}{s-1}
$$

$$
-X_1(s) + (s-1)X_2(s) = 1 + \frac{1}{s-1}
$$

Resolviendo el anterior sistema para $X_1(s)$, $X_2(s)$:

$$
X_1(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{11}{4}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+1}
$$

$$
X_2(s) = -\frac{1}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{11}{8}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+1}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \pounds^{-1}\{X_1(s)\} \\
&= -\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{11}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\
&= -e^t + \frac{11}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t} \\
x_2(t) &= \pounds^{-1}\{X_2(s)\} \\
&= -\frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{11}{8}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \frac{1}{8}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+1)}\right\}
\end{aligned}
$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

$$= \quad -\frac{1}{4}e^{t} + \frac{11}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-t}$$

Usar la transformada de Laplace para resolver los siguientes sistemas de E.D.

1. $\frac{dx}{dt} = -x + y$
$\frac{dy}{dt} = 2x, \quad x(0) = 0, \;\; y(0) = 1$
(**Rta.:** $x(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}, \;\; y(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{t}$)

2. $\frac{dx}{dt} = 2y + e^{t}$
$\frac{dy}{dt} = 8x - t, \quad x(0) = 1, \;\; y(0) = 1$
(**Rta.:** $x = \frac{173}{192}e^{4t} + \frac{t}{8} - \frac{e^{t}}{15} + \frac{53}{320}e^{-4t}, \quad y = \frac{1}{16} - \frac{53}{160}e^{-4t} - \frac{8}{15}e^{t} + \frac{173}{96}e^{4t}$)

3. $\frac{dx}{dt} = x - 2y$
$\frac{dy}{dt} = 5x - y, \quad x(0) = -1, \;\; y(0) = 2$
(**Rta.:** $x = -\cos 3t - \frac{5}{3}\operatorname{sen} 3t, \quad y = 2\cos 3t - \frac{7}{3}\operatorname{sen} 3t$)

4. Dos pesos de 96 libras y 64 libras se mueven horizontalmente en una superficie lisa, cada resorte tiene $k = k_1 = k_2 = 600$. En $t = 0$ los resortes están sin estirar y el de peso 96 tiene una velocidad de 600 pies/seg. alejándose del muro y el otro esta en reposo. Encontrar las E.D. del movimiento y la posición en el tiempo t. (Ver Capítulo 4 figura 4.16)
(**Rta.:** $m_1\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x + k_2(y - x), \quad m_2\frac{d^2y}{dt^2} = -k_2(y - x)$
$x = 24\operatorname{sen} 10t + 6\sqrt{6}\operatorname{sen}\sqrt{600}t, \quad y = 36\operatorname{sen} 10t - 6\sqrt{6}\operatorname{sen}\sqrt{600}t$)

Ejercicio 5. Hallar las E.D. del sistema de resortes acoplados con constantes k_1 y k_2 y masas m_1 y m_2 respectivamente, como se muestra en la figura 4.14; resolverla con $k_1 = k_2 = k_3 = 1, \;\; m_1 = m_2 = 1$ y $x(0) = 0, \;\; y(0) = 0, \;\; x'(0) = -1, \;\; y'(0) = 1$
(**Rta.:** $x = -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}, \;\; y = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t}$)

Universidad de Antioquia, Depto de Matematicas

7.6. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Ejemplo 8. Con el paquete Maple, hallar la solución general y la solución que cumple la condición inicial, del sistema:
$x_1' = -4x_1 - x_2$
$x_2' = x_1 - 2x_2$
con $x_1(0) = 1, \;\; x_2 = 2$
Solución general:

```
>sys1 :=[diff(x(t),t)=-4*x(t)-y(t), diff(y(t),t)=x(t)-2*y(t)];
```

sys1 $:= [x' = -4 * x - y, y' = x - 2 * y]$

```
>sol1 := dsolve(sys1);
```

sol1 $:= \{x\,(t) = e^{-3\,t}\,(_C1 + _C2\,t)\,, y\,(t) = -e^{-3\,t}\,(_C1 + _C2\,t + _C2)\}$
La solución que cumple la condición inicial:

```
>dsolve( {diff(x(t),t) =-4*x(t)- y(t), diff(y(t),t) =

x(t)-2*y(t),x(0)=1, y(0)=2},{x(t),y(t)});
```

La solución es

```
{y(t) = -exp(-3 t) (-2 - 3 t), x(t) = exp(-3 t) (1 - 3 t)}
```

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

CAPÍTULO 8

INTRODUCCION A LA TEORIA DE ESTABILIDAD

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

8.1. SISTEMAS AUTÓNOMOS, EL PLANO DE FASE

Frecuentemente nos ocurre que no podemos resolver una E.D. analíticamente y con más frecuencia si la E.D. es no lineal, pero aunque no podamos resolverla explícitamente, sí podemos analizar el comportamiento cualitativo de sus soluciones. Buscaremos esta información cualitativa a partir de la E.D., sin resolverla explícitamente.

Estudiaremos en este capitulo sistemas de la forma

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) \tag{8.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y) \tag{8.2}$$

donde F y G son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en todo el plano.
El sistema (8.1) y (8.2) en el que la variable independiente t no aparece en F y en G se le llama autónomo.

Por el **Teorema A.7 (de Picard)**, si t_0 es cualquier número y (x_0, y_0) es un punto cualquiera del plano XY, entonces existe una única solución:

$$x = x(t) \tag{8.3}$$
$$y = y(t) \tag{8.4}$$

tal que $x(t_0) = x_0$ y $y(t_0) = y_0$

Si $x(t)$ y $y(t)$ no son ambas constantes, entonces (8.3) y (8.4) son las ecuaciones parámetricas de una curva en el plano XY, a este plano lo llamaremos el plano de fase y la curva solución la llamaremos una trayectoria del sistema y la denotamos por $\Gamma(x(t), y(t))$, la familia de trayectorias representadas en el plano de fase la llamaremos el retrato de fase

Nota: si (8.3) y (8.4) es solución de (8.1) y (8.2), entonces

$$x = x(t + c) \tag{8.5}$$
$$y = y(t + c) \tag{8.6}$$

también es solución de (8.1) y (8.2) para cualquier c, luego,

$$\Gamma(x(t), y(t)) = \Gamma(x(t + c), y(t + c))$$

Por tanto, cada trayectoria viene representada por muchas soluciones que difieren entre si por una translación del parámetro. También cualquier trayectoria que pase por el punto (x_0, y_0), debe corresponder a una solución de la forma (8.5) y (8.6), es decir, por cada punto del plano de fase pasa una sola trayectoria, o sea, que las trayectorias no se intersectan.

Nota:
i). La dirección de t creciente a lo largo de la trayectoria dada es la misma para todas las soluciones que representan a esa trayectoria. Una trayectoria $\Gamma(x(t), y(t))$ es por tanto una curva dirigida y en las figuras utilizamos flechas para indicar la dirección de t creciente sobre las trayectorias.
ii). De lo anterior se concluye que para los sistemas $x' = F(x, y)$, $y' = G(x, y)$ y $x' = -F(x, y)$, $y' = -G(x, y)$ los diagramas de fase son los mismos, excepto que la orientación en cada trayectoria se invierte.
iii). Para el punto (x_0, y_0) tal que

$$\frac{dy}{dt} = F(x_0, y_0) = 0, \qquad y \qquad \frac{dx}{dt} = G(x_0, y_0) = 0$$

Universidad de Antioquia Depto. de Matemáticas

se cumple que

$$x(t) \equiv x_0 \qquad y \qquad y(t) \equiv y_0$$

es también solución (solución constante), pero no la llamamos trayectoria.

De las anotaciones anteriores se concluye que las trayectorias cubren todo el plano de fase y no se intersectan entre si, la única excepción a esta afirmación ocurre en los puntos (x_0, y_0), donde F y G son cero.

Definición 8.1 (Punto Crítico). *Al punto (x_0, y_0) tal que $F(x_0, y_0) = 0$ y $G(x_0, y_0) = 0$ se le llama un punto crítico del sistema.*

Nota: en estos puntos la solución es única y es la solución constante $x(t) = x_0$ y $y(t) = y_0$. Como se dijo antes, una solución constante no define una trayectoria, así que por un punto crítico no pasa ninguna trayectoria.

Supondremos que todo punto crítico (x_0, y_0) es aislado, es decir, existe un círculo centrado en (x_0, y_0) que no contiene ningún otro punto crítico.

Vimos en el Cap. IV que la E.D. del péndulo amortiguado (4.18) en la página 152 era

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{a}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Haciendo $x = \theta$ y $y = \theta'$ se obtiene el siguiente sistema autónomo no lineal

$$\begin{aligned} x' &= y = F(x, y) \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{a}\operatorname{sen} x = G(x, y). \end{aligned}$$

Los puntos $(n\pi, 0)$ para $n \in \mathbf{Z}$ son puntos críticos aislados, ya que $F(n\pi, 0) = 0$ y $G(n\pi, 0) = 0$. Estos puntos $(n\pi, 0)$ corresponden a un estado de movimiento de la partícula de masa m en el que tanto la velocidad ángular $y = \frac{d\theta}{dt}$ y la aceleración ángular $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ se anulan simultáneamente, o sea que la partícula está en reposo; no hay fuerza que actúe sobre ella y por consiguiente está en equilibrio. Por esta razón en algunos textos a los puntos críticos también los llaman puntos de equilibrio.

Como $x'(t) = F(x, y)$ y $y'(t) = G(x, t)$ son las componentes del vector tangencial a las trayectorias en el punto $P(x, y)$, consideremos el campo vectorial:

$$\vec{V}(x, y) = F(x, y)\vec{i} + G(x, y)\vec{j}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

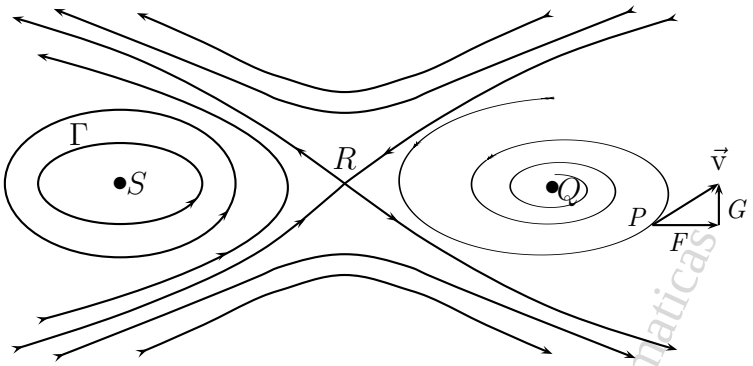


Figura 8.1

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

donde $\frac{dx}{dt} = F(x, y)$ y $\frac{dy}{dt} = G(x, y)$
En $P(x, y)$ las componentes de $\vec{V}(x, y)$ son $F(x, y)$ y $G(x, y)$ (ver figura 8.1). Como $\frac{dx}{dt} = F$ y $\frac{dy}{dt} = G$, entonces $\vec{V}$ es tangente a la trayectoria en P y apunta en la dirección de t creciente.
Si t es el tiempo, entonces $\vec{V}$ es el vector velocidad de una partícula que se mueve sobre la trayectoria. Así el plano de fase está lleno de partículas y cada trayectoria es la traza de una partícula precedida y seguida por otras sobre una misma trayectoria. Esto es lo que ocurre en un fluído en movimiento y como el sistema es autónomo entonces $\vec{V}(x, y)$ no cambia con el tiempo, por esta razón al movimiento del fluído se le llama estacionario; los puntos críticos Q, R, S son puntos de velocidad cero, donde las partículas se hallan en reposo (puntos estacionarios del fluído).

De la figura se extraen las siguientes caracteríticas:

1. Los puntos críticos.

2. La disposición de las trayectorias cerca de los puntos críticos.

3. La estabilidad o inestabilidad de los puntos críticos, es decir, si una partícula próxima a un punto crítico permanece cerca de él o se aleja hacia otra zona del plano.

4. Las trayectorias cerradas como la Γ, corresponden a soluciones periódicas.

Como en general los sistemas no lineales no pueden resolverse explícitamente, el propósito de la teoría cualitativa que desarrollaremos en este capítulo es descubrir todo cuanto sea posible acerca de los diagramas de fase a partir de las funciones F y G.

Ejercicios.

1. Describir el diagrama de fase del sistema: $x' = 0,\ y' = 0$.
   (**Rta.:** cada punto del plano de fase XY es punto crítico, no hay trayectorias)

2. Describir el diagrama de fase del sistema: $x' = x,\ y' = 0$.
   (**Rta.:** todos los puntos del eje Y son puntos críticos. Las trayectorias son semirrectas horizontales con dirección hacia la derecha o hacia la izquierda).

3. Describir el diagrama de fase del sistema: $x' = 1,\ y' = 2$.
   (**Rta.:** no hay puntos críticos, las trayectorias son rectas de pendiente 2 con dirección hacia la derecha y ascendiendo)

4. Describir el diagrama de fase del sistema: $x' = -x,\ y' = -y$.
   (**Rta.:** punto crítico $(0, 0)$, las trayectorias son todas las semirrectas de cualquier pendiente con dirección hacia el origen)

5. Hallar los puntos críticos de
   a) $x'' + x' - (x^3 + x^2 - 2x) = 0$, b) $x' = y^2 - 5x + 6,\ y' = x - y$
   (**Rta.:** a) $(-2, 0), (0, 0), (1, 0)$, b) $(2, 2), (3, 3)$)

6. Dado el sistema no autónomo $x = x,\ y' = x + e^t$. Hallar la solución general y luego dibujar las trayectorias orientadas en el plano de fase.
   (**Rta.:** $x = C_1 e^t,\ y = C^1 e^t + e^t + C_2$)

7. En los siguientes sistemas no lineales i) Hallar los puntos críticos, ii) Hallar la E.D. de sus trayectorias. iii) Resolver la E.D., iv) Esbozar varias trayectorias indicando su dirección.
   a)$x' = y(x^2 + 1),\ y' = 2xy^2$, b) $x' = y(x^2 + 1),\ y' = -x(x^2 + 1)$,

Universidad de Antioquia. Depto. de Matemáticas

c) $x' = e^y$, $y' = e^y \cos x$, d) $x' = -x$, $y' = 2x^2y^2$
(**Rta.:** a) i) Todos los puntos del eje X, ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2+1}$, iii) $y = c(x^2+1)$, b) i) $(0,0)$, ii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, iii) $x^2 + y^2 = c^2$, c) i) No hay puntos críticos, ii) $\frac{dy}{dx} = \cos x$, iii) $y = \operatorname{sen} x + c$, d) i) Todos los puntos del eje Y, ii) $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$, iii) $y = \frac{1}{x^2+c}$ y $y = 0$)

8.2. TIPOS DE PUNTOS CRITICOS, ESTABILIDAD.

Universidad de Antioquia. Depto. de Matematicas

Consideremos el sistema autónomo:

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y) \tag{8.7}$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x,y) \tag{8.8}$$

donde F y G son continuas, con derivadas parciales continuas en el plano de fase XY.
Sea (x_0, y_0) un punto crítico aislado de (8.7) y (8.8). Si $\Gamma(x(t), y(t))$ es una trayectoria de (8.7) y (8.8), decimos que Γ tiende a (x_0, y_0), cuando $t \to \infty$ (o $t \to -\infty$), si

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = x_0 \tag{8.9}$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = y_0 \tag{8.10}$$

Nota: si se cumple (8.9) y (8.10), entonces (x_0, y_0) es punto crítico de (8.7) y (8.8), además, si

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} \text{ : existe o es igual a } \pm\infty,$$

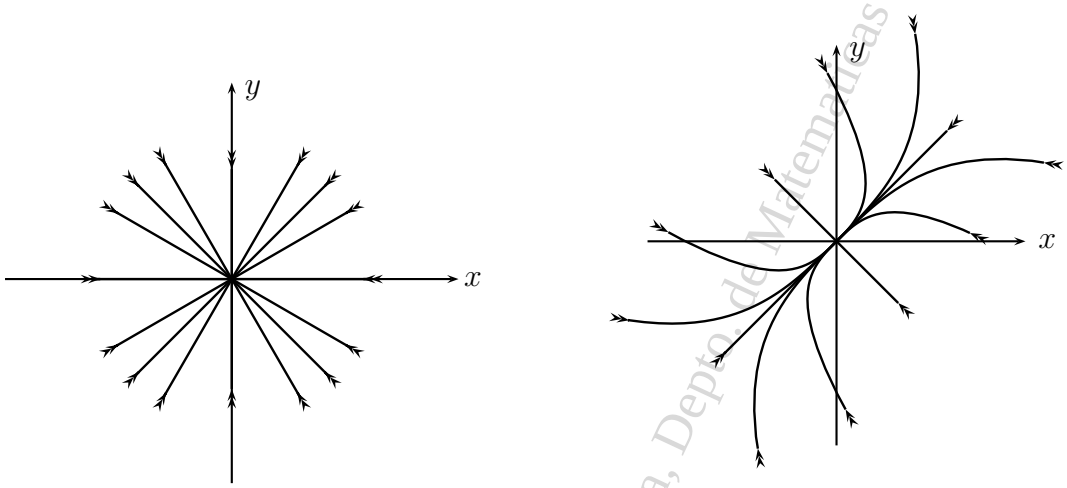
entonces se dice que Γ "entra" al punto crítico (x_0, y_0) cuando $t \to \infty$ o $t \to -\infty$. Esto significa que la recta que une (x_0, y_0) con $P(x,y)$ tiene una dirección determinada cuando $t \to \infty$ o $t \to -\infty$.

Eliminando t tenemos que $\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}$: pendiente de la recta tangente a la trayectoria de (8.7) y (8.8) en (x,y) cuando F y G no se anulan simultáneamente; cuando F y G se anulan simultáneamente, (x_0, y_0) es un punto crítico y ninguna trayectoria pasa por él.

8.2.1. TIPOS DE PUNTOS CRITICOS.

Sin pérdida de generalidad supondremos que el punto $(0, 0)$ es un crítico.

1. **Nodos.** (ver figura 8.2 y 8.3)



nodo propio o nodo estrella asintóticamente estable

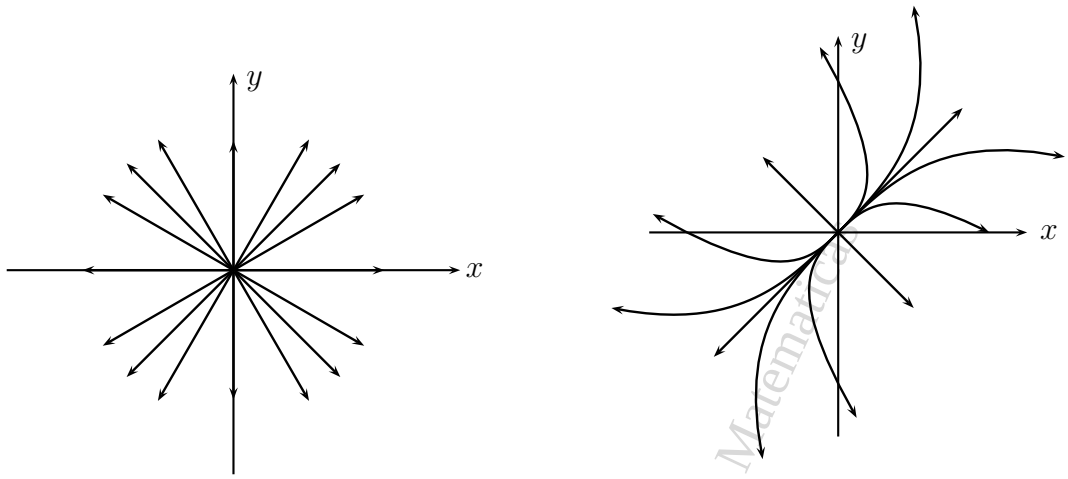
nodo impropio asintóticamente estable

Figura 8.2

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Se distinguen dos tipos de nodos: nodos propios y nodos impropios.
a). Los nodos propios : en estos el retrato de fase esta formado por semirrectas donde todas entran (o todas salen) del punto crítico, se le llama también nodo estrella. Cuando las trayectorias tienden al punto crítico (sea nodo u otro tipo de punto crítico) cuando $t \to \infty$, se dice que es un sumidero y cuando salen de él, o sea cuando tienden al punto crítico cuando $t \to -\infty$, se dice que es una fuente.

b). Nodo impropio: a un punto de este tipo tienden e incluso entran las trayectorias cuando $t \to \infty$ (ó $t \to -\infty$). Para este nodo existen cuatro trayectorias en forma de semirrectas con extremos en el origen. Todas las demás trayectorias tienen el aspecto de ramas de parábola y al tender hacia el origen sus pendientes tienden a la pendiente de una de las semirrectas.



nodo propio o nodo estrella inestable

nodo impropio inestable

Figura 8.3

Universidad de Antioquia Depto. de Matemáticas

Ejemplo 1. Consideremos el sistema siguiente $\frac{dx}{dt} = x$ y $\frac{dy}{dt} = -x + 2y$ entonces $(0,0)$ es punto crítico.
La solución general es $x = C_1\, e^t,\ y(t) = C_1\, e^t + C_2\, e^{2t}$.
Cuando $C_1 = 0 \Rightarrow x = 0$ y $y = C_2\, e^{2t}$ esto implica que la trayectoria es el eje Y positivo si $C_2 > 0$ y el eje Y negativo si $C_2 < 0$ y cada trayectoria tiende y entra al orígen cuando $t \Rightarrow -\infty$.

Si $C_2 = 0$ entonces $x(t) = C_1\, e^t$ y $y = C_1\, e^t$ y la trayectoria es la semirrecta $y = x$ con $x > 0$ y $C_1 > 0$, o también es la semirrecta $y = x$ con $x < 0$ y $C_1 < 0$. En estos dos casos ambas trayectorias tienden y entran al orígen cuando $t \Rightarrow -\infty$.

Cuando $C_1 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$, las trayectorias están sobre las parábolas $y = x + \frac{C_2}{C_1^2}\, x^2$ que entran al orígen con pendiente 1. Debe entenderse que estas trayectorias constan solo de una porción de la parábola, la parte con $x > 0$ si $C_1 > 0$ y la parte $x < 0$ si $C_1 < 0$.

Obsérvese que $\frac{dy}{dx} = \frac{-x+2y}{x}$: pendiente de la tangente a la trayectoria que pasa por $(x,y) \neq (0,0)$; resolviendo la E.D. encontramos $y = x + Cx^2$

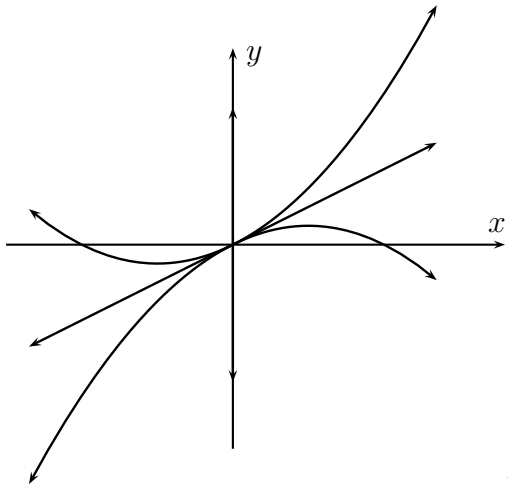


Figura 8.4 Nodo impropio, inestable

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

que son las curvas (parábolas) sobre las que se apoyan las trayectorias, excepto las que están sobre el eje Y (Ver figura 8.4).

2. **Punto de Silla.**

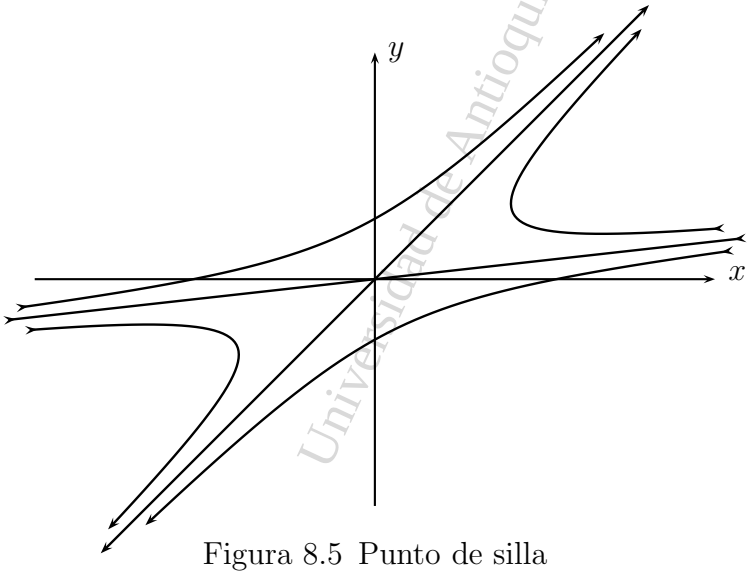


Figura 8.5 Punto de silla

El origen es un punto de silla si el retrato de fase muestra que a este punto tienden y hacia él entran dos semirrectas con extremos en el ori-

gen cuando $t \to \infty$ y hay otras dos semirrectas que salen del origen cuando $t \to \infty$. Entre estas cuatro semirrectas hay cuatro regiones, las cuales contienen una familia de trayectorias en forma de hipérbolas; estas trayectorias no tienden hacia origen cuando $t \to \infty$, sino que son asintóticas a alguna de las semirrectas cuando $t \to \infty$ (figura 8.5)

3. **Centros (o vórtices)**(ver figura 8.6)

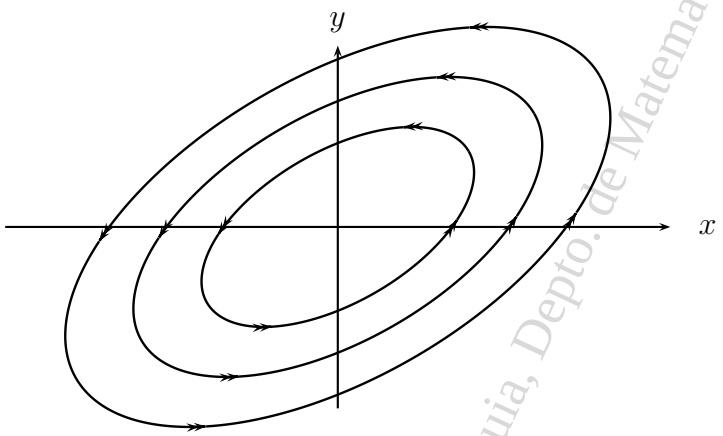


Figura 8.6 Centro (estable)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Es un punto crítico que está rodeado por una familia de trayectorias <u>cerradas</u>. Ninguna trayectoria tiende a él cuando $t \to \pm\infty$.

Ejemplo 2. Consideremos el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = x.$$

Entonces $(0, 0)$ es el único punto crítico.
Su solución general es :

$$x = -C_1 \operatorname{sen} t + C_2 \cos t$$

$$y = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$$

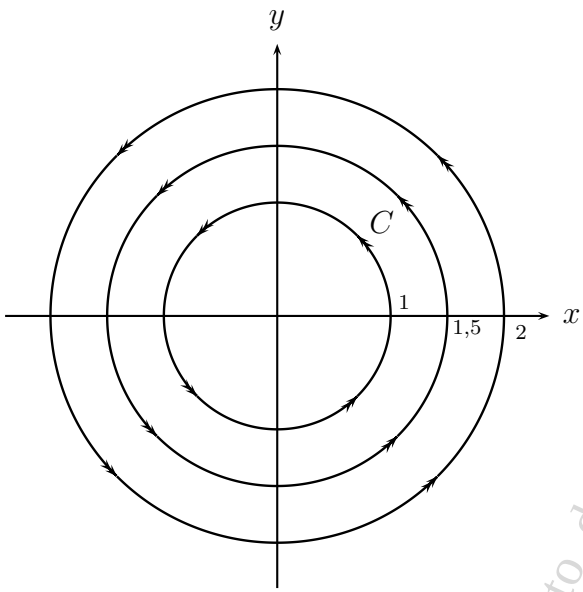


Figura 8.7 Centro (estable)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

La solución (o trayectoria) que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $y(0) = 0$ es

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

Y la solución determinada por $x(0) = 0$ y $y(0) = 1$ es

$$x = -\operatorname{sen} t = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \cos t = \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Estas dos soluciones diferentes definen la misma trayectoria Γ, es decir, la circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$.
En ambos casos la dirección del recorrido es en sentido contrario a las agujas del reloj.
Eliminando t del sistema, tenemos que $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ cuya solución es $x^2 + y^2 = R^2$ que es una familia de circunferencias en el plano de fase xy, pero sin dirección de recorrido. En este caso $(0, 0)$ es un centro(ver figura 8.7).

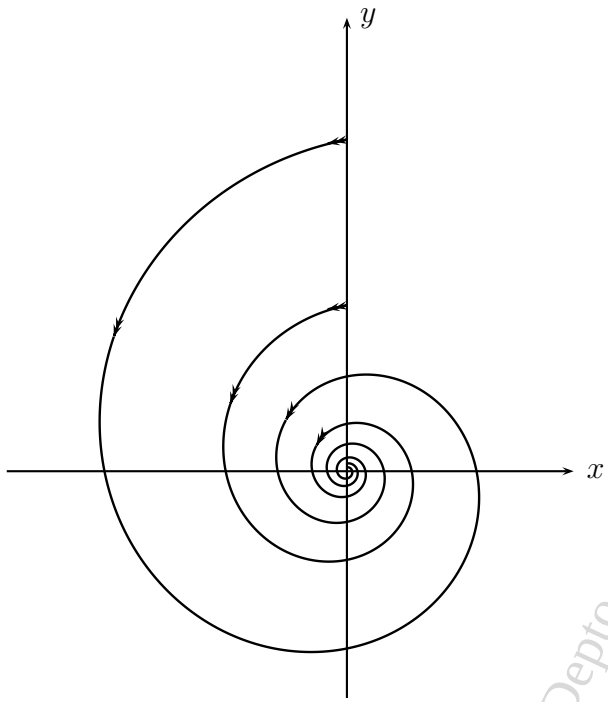


Figura 8.8 Foco o espiral (asintóticamente estable)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

4 **Focos.** (ver figura 8.8)

Un punto crítico se llama foco o punto espiral si el retrato de fase muestra que hacia él tienden (o salen de él) las trayectorias de una familia que gira en forma espiral un número infinito de veces cuando $t \to \pm\infty$. Nótese que aunque las trayectorias tienden al origen, no entran a él en una dirección determinada, es decir,

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{dy}{dx} \text{ no existe}$$

Ejemplo 3. Sea a una constante arbitraria y consideremos el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = ax - y \tag{8.11}$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay \tag{8.12}$$

entonces $(0,0)$ es el único punto crítico.
La E.D. de las trayectorias es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+ay}{ax-y} \tag{8.13}$$

Pasemos a coordenadas polares: $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ como $r^2 = x^2 + y^2$ y $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, entonces

$$r\frac{dr}{dx} = x + y\frac{dy}{dx} \qquad\qquad r^2\frac{d\theta}{dx} = x\frac{dy}{dx} - y$$

Luego (8.13) queda así: $\frac{dr}{d\theta} = ar \Rightarrow r = Ce^{a\theta}$ es la ecuación polar de las trayectorias.
La dirección del recorrido se puede deducir del hecho que $\frac{dx}{dt} = -y$ cuando $x = 0$.
Si $a = 0$ entonces el sistema (8.11) y (8.12) se colapsa en el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = -y \tag{8.14}$$

$$\frac{dy}{dt} = x \tag{8.15}$$

y se convierte en $r = c$, que es la ecuación polar de la familia de circunferencias

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

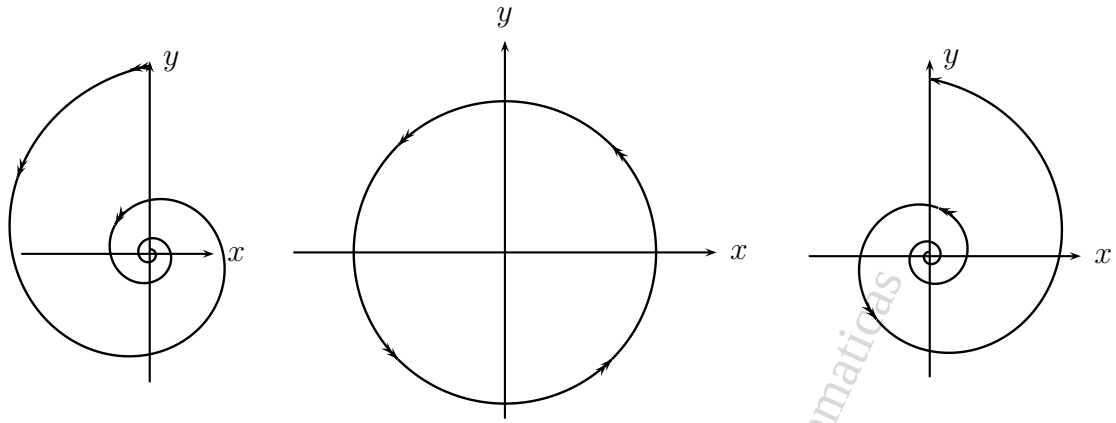
de centro en el orígen y en este caso decimos que cuando el parámetro $a = 0$ se ha producido una bifurcación, a este punto lo llamamos punto de bifurcación, en esencia es un punto donde las soluciones cambian cualitativamente de estables (o asintóticamente estables) a inestables o viceversa (Ver figura 8.9).

Definición 8.2 (Estabilidad). *Supongamos por conveniencia que* $(0,0)$ *es un punto crítico del sistema*

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y) \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = G(x,y)$$

Decimos que $(0,0)$ *es un punto crítico estable si para cada* $R > 0$ *existe un* $r > 0$ *con* $r \leq R$*, tal que toda trayectoria que está dentro del círculo* $x^2 + y^2 = r^2$*, para algún* $t = t_0$*, permanece en el círculo* $x^2 + y^2 = R^2$ *para todo* $t > t_0$*, es decir, si todas las trayectorias que están suficientemente cerca al punto crítico permanecen cercanas a él (ver figura 8.10).*

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas



$a < 0$
a) Asint. estable

$a = 0$
b) Estable

$a > 0$
c) Inestable

Figura 8.9 Bifurcación

Definición 8.3 (**Asintóticamente Estable).** *Si es estable y existe un círculo $x^2 + y^2 = r_0^2$, tal que toda trayectoria que está dentro de él para algún $t = t_0$, tiende al orígen cuando $t \to \infty$.*

Definición 8.4. *Si el punto crítico no es estable, diremos que es inestable.*

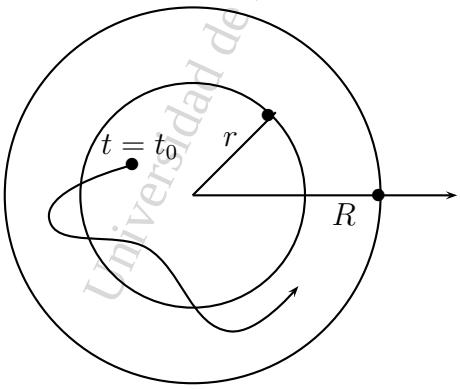


Figura 8.10

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Los nodos de la figura 8.3 y 8.4, el punto de silla de la figura 8.5, el foco (o espiral) de la figura 8.9 c) son puntos inestables.

Los centros de la figuras 8.6 y 8.7 son estables, pero no asintóticamente estables.

Los nodos de la figura 8.2, el foco (o espiral) de la figura 8.8 y 8.9a) , son asintóticamente estables.

Para los siguientes ejercicios determine el tipo de punto crítico que es $(0,0)$ y diga si es asintóticamente estable, estable o inestable:

Ejercicio 1. $\frac{dx}{dt} = -2x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y$
(**Rta:** Nodo asintóticamente estable (o sumidero).)

Ejercicio 2. $\frac{dx}{dt} = 4x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + y$
(**Rta:** Nodo impropio inestable (o fuente).)

Ejercicio 3. $\frac{dx}{dt} = x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + y$
(**Rta:** Punto de Silla inestable.)

Ejercicio 4. $\frac{dx}{dt} = 3x + y, \quad \frac{dy}{dt} = 5x - y$
(**Rta:** Punto de Silla inestable.)

Ejercicio 5. $\frac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - 3y$
(**Rta:** Nodo asintóticamente estable (o sumidero).)

Ejercicio 6. $\frac{dx}{dt} = 5x - 3y, \quad \frac{dy}{dt} = 3x - y$
(**Rta:** Nodo inestable (o fuente).)

Ejercicio 7. $\frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - y$
(**Rta:** Punto espiral inestable (es una fuente).)

Ejercicio 8. $\frac{dx}{dt} = x - 3y, \quad \frac{dy}{dt} = 6x - 5y$
(**Rta:** Punto espiral asintóticamente estable (es una sumidero).)

Ejercicio 9. $\frac{dx}{dt} = 2x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - 2y$
(**Rta:** Centro estable.)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematica.

Ejercicio 10. $\frac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 5x - y$
(**Rta:** Centro estable.)

8.3. PUNTOS CRITICOS Y CRITERIOS DE ESTABILIDAD PARA SISTEMAS LINEALES

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Consideremos el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \tag{8.16}$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y \tag{8.17}$$

El cual tiene a $(0,0)$ como punto crítico. Supondremos de ahora en adelante que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0 \tag{8.18}$$

Por tanto, $(0,0)$ es el único punto crítico.
(8.16) y (8.17) tiene una solución no trivial de la forma

i).

$$\vec{x}_1(t) = e^{m_1 t}\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \ \vec{x}_2(t) = e^{m_2 t}\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

donde $m_{1,2}$ son raíces distintas de la cuadrática:

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \tag{8.19}$$

que se conoce como ecuación caracaterística del sistema y $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$ son los vectores propios asociados a los valores propios $m_{1,2}$. La condición (8.18) implíca que $m \neq 0$.

ii). O de la forma

$$\vec{x}_1(t) = e^{mt}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \ \vec{x}_2(t) = e^{mt}[\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}] = e^{mt}\begin{bmatrix} A_1 + At \\ B_1 + Bt \end{bmatrix},$$

si m es una raíz de multiplicidad dos de la ecuación característica

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0.$$

y $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ es el vector propio asociado a m y $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$ es el vector propio generalizado de rango dos de m.

Teorema 8.1 (**Caracterización de la naturaleza del punto crítico).**

Sean m_1 y m_2 las raíces de (8.19). La naturaleza del punto crítico está determinada por estas raíces.
Casos Principales:
CASO A: *Si las raíces m_1 y m_2 son reales, distintas y del mismo signo, entonces es un nodo.*
CASO B: *Si las raíces m_1 y m_2 son reales, distintas y de signos opuestos, entonces es un punto de silla.*
CASO C: *Si las raíces m_1 y m_2 son complejas conjugadas pero no imaginarias puras, entonces es un foco.*
Casos Frontera:
CASO D: *Si las raíces m_1 y m_2 son reales e iguales, entonces es un nodo.*
CASO E: *Si las raíces m_1 y m_2 son imaginarias puras, entonces es un centro.*

Demostración: CASO A: si las raíces m_1 y m_2 son reales, distintas y del mismo signo, entonces $(0, 0)$ es un nodo.

Demostración: supongamos que $m_1 < m_2 < 0$.
Sabemos que la solución del sistema 8.16, 8.17 es:

$$x = C_1 A_1 e^{m_1 t} + C_2 A_2 e^{m_2 t} \tag{8.20}$$

$$y = C_1 B_1 e^{m_1 t} + C_2 B_2 e^{m_2 t} \tag{8.21}$$

donde los vectores

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} e^{m_1 t} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} e^{m_2 t}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

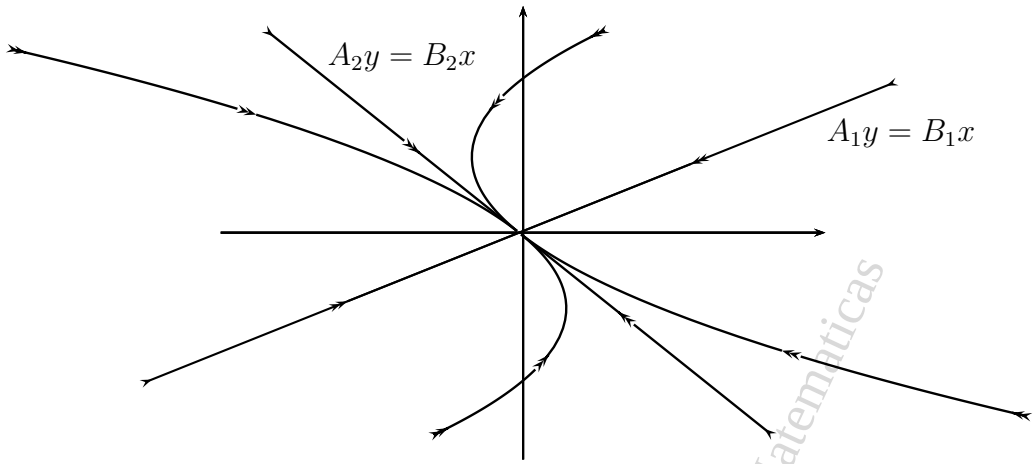


Figura 8.11 Nodo impropio (asintóticamente estable)

son linealmente independientes, por lo tanto $\frac{B_1}{A_1} \neq \frac{B_2}{A_2}$ y las C son constantes arbitrarias.
Analicemos los coeficientes C_1 y C_2
1.) Si $C_2 = 0$, entonces

$$x = C_1 A_1\, e^{m_1 t}, \qquad y = C_1 B_1\, e^{m_1 t} \tag{8.22}$$

en este caso:
a). Si $C_1 > 0$, entonces (8.22) representa una trayectoria que consiste en la semirrecta $A_1 y = B_1 x$ con pendiente $\frac{B_1}{A_1}$
b). Si $C_1 < 0$, entonces (8.22) representa una trayectoria que consiste de la otra semirrecta opuesta a la anterior.
Como $m_1 < 0$, entonces ambas semirrectas tienden a $(0,0)$ cuando $t \to \infty$ y como $\frac{y}{x} = \frac{B_1}{A_1}$, entonces ambas semirrectas entran a $(0,0)$ con pendiente $\frac{B_1}{A_1}$.
2). Si $C_1 = 0$, entonces

$$x = C_2 A_2\, e^{m_2 t}, \qquad y = C_2 B_2\, e^{m_2 t} \tag{8.23}$$

Similarmente (8.23) representan dos semirrectas de la recta $A_2 y = B_2 x$ con pendiente $\frac{B_2}{A_2}$, las cuales tienden a $(0,0)$ cuando $t \to \infty$ y entran a él con pendiente $\frac{B_2}{A_2}$.

3). Si $C_1 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$, entonces (8.20) y (8.21) representa trayectorias curvas; como $m_1 < 0$ y $m_2 < 0$, entonces estas trayectorias tienden a $(0,0)$ cuando $t \to \infty$, además, como

$$m_1 - m_2 < 0$$

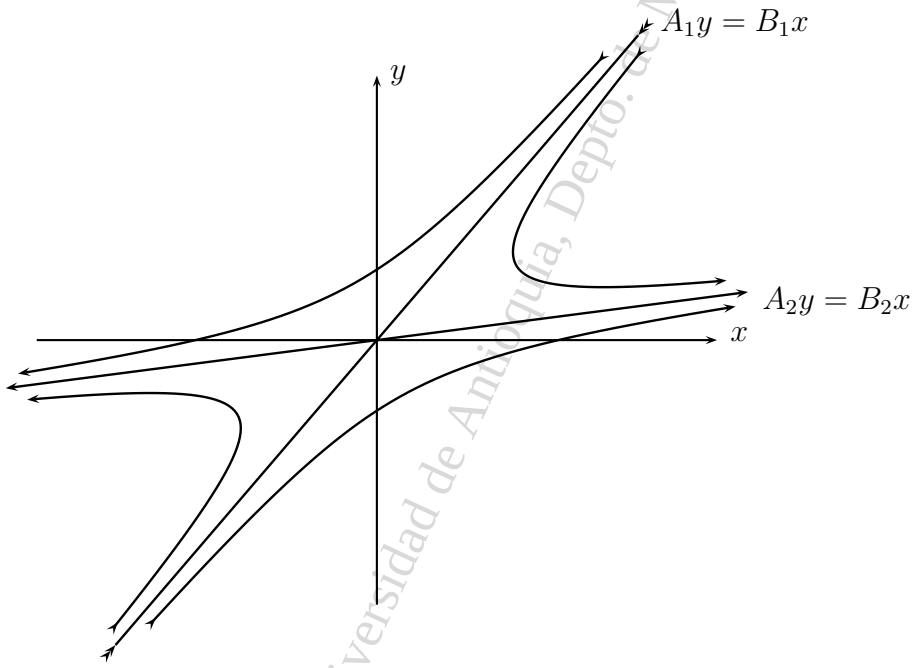
Universidad de Antioquia, Depto de Matemáticas

y

$$\frac{y}{x} = \frac{C_1 B_1\, e^{m_1 t} + C_2 B_2\, e^{m_2 t}}{C_1 A_1\, e^{m_1 t} + C_2 A_2\, e^{m_2 t}} = \frac{\frac{C_1 B_1}{C_2}\, e^{(m_1 - m_2)\, t} + B_2}{\frac{C_1 A_1}{C_2}\, e^{(m_1 - m_2)\, t} + A_2}$$

entonces, $\frac{y}{x} \to \frac{B_2}{A_2}$ cuando $t \to \infty$, así que las trayectorias entran a $(0,0)$ con pendiente $\frac{B_2}{A_2}$. De acuerdo a lo analizado $(0,0)$ es un nodo impropio y es, como lo veremos más adelante, asintóticamente estable (Ver figura 8.11).

Si $m_1 > m_2 > 0$, la situación es exactamente la misma, excepto que las trayectorias salen de $(0,0)$ cuando $t \to \infty$, las flechas son al contrario del caso anterior, $(0,0)$ es un nodo impropio inestable.



Universidad de Antioquia, Depto. de Matemática

Figura 8.12 Punto de silla (inestable)

CASO B: si las raíces m_1 y m_2 son reales, distintas y de signos opuestos, entonces $(0,0)$ es un <u>punto de silla</u> (ver figura 8.12).

Demostración: supongamos que $m_1 < 0 < m_2$.
La solución general de (8.16) y (8.17) es de la forma (8.20) y (8.21), como en el CASO A se tienen cuatro trayectorias en forma de semirrectas opuestas; un par de semirrectas opuestas representadas por (8.22) con $m_1 < 0$, que tienden y entran a $(0,0)$ cuando $t \to \infty$ y el otro par de semirrectas opuestas representadas por (8.23) con $m_2 > 0$ las cuales tienden y entran al origen $(0,0)$ cuando $t \to -\infty$.

Si $C_1 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$, la solución general (8.20) y (8.21) representa trayectorias curvas, pero como $m_1 < 0 < m_2$, entonces ninguna de ellas tiende a $(0,0)$ cuando $t \to \infty$ ó $t \to -\infty$. En lugar de esto una trayectoria es asintótica a una de las semirrectas de (8.23) cuando $t \to \infty$ y asintótica a una de las semirrectas de (8.22) cuando $t \to -\infty$, en efecto, como $m_2 > m_1$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{C_1B_1\, e^{m_1 t} + C_2B_2\, e^{m_2 t}}{C_1A_1\, e^{m_1 t} + C_2A_2\, e^{m_2 t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{C_1B_1}{C_2}\, e^{(m_1-m_2)\,t} + B_2}{\frac{C_1A_1}{C_2}\, e^{(m_1-m_2)\,t} + A_2} = \frac{B_2}{A_2}$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-\infty} \frac{C_1B_1\, e^{m_1 t} + C_2B_2\, e^{m_2 t}}{C_1A_1\, e^{m_1 t} + C_2A_2\, e^{m_2 t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{B_1 + \frac{C_2B_2}{C_1}\, e^{(m_2-m_1)\,t}}{A_1 + \frac{C_2A_2}{C_1}\, e^{(m_2-m_1)\,t}} = \frac{B_1}{A_1}$$

luego $(0,0)$ es un punto de silla y es inestable.

CASO C: si las raíces m_1, m_2 son complejas conjugadas pero no imaginarias puras, el punto crítico es un foco (o punto espiral).

Demostración: m_1, m_2 son de la forma $a \pm bi$, donde a y b son reales no nulos. En este caso el discriminante de 8.19 es negativo y por tanto

$$D = (a_1+b_2)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1) = (a_1-b_2)^2 + 4a_2b_1 < 0 \qquad (8.24)$$

Suponiendo que al valor propio $\lambda = a + ib$ esta asociado el vector propio

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

entonces la solución general es de la forma

$$x = e^{at}[C_1(A_1\cos bt - A_2 \operatorname{sen} bt) + C_2(A_1 \operatorname{sen} bt + A_2\cos bt)] \qquad (8.25)$$

$$y = e^{at}[C_1(B_1\cos bt - B_2 \operatorname{sen} bt) + C_2(B_1 \operatorname{sen} bt + B_2\cos bt)] \qquad (8.26)$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

donde C_1 y C_2 son parámetros.

Si $a < 0$ entonces $x \to 0$ y $y \to 0$ cuando $t \to \infty$, o sea que todas las trayectorias tienden a $(0,0)$ cuando $t \to \infty$ y por tanto $(0,0)$ es asintóticamente estable.
Probemos que las trayectorias no entran a $(0,0)$ cuando $t \to \infty$, sino que giran alrededor de él en forma de espirales.

Para ello utilicemos coordenadas polares y mostremos que a lo largo de cualquier trayectoria, el signo de $\frac{d\theta}{dt}$ no cambia para todo t.

Sabemos que

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}}{x^2 + y^2}$$

y usando (8.16) y (8.17):

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x\,(a_2 x + b_2 y) - y\,(a_1 x + b_1 y)}{x^2 + y^2} = \frac{a_2 x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1 y^2}{x^2 + y^2}$$

Como estamos interesados solo en soluciones que representan trayectorias, suponemos $x^2 + y^2 \neq 0$.

De (8.24): a_2 y b_1 deben tener signos opuestos.
Supongamos que $a_2 > 0$ y $b_1 < 0$.
Si

$$y \;=\; 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = a_2 > 0 \tag{8.27}$$

Si

$$y \;\neq\; 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} \neq 0 \tag{8.28}$$

ya que si $\frac{d\theta}{dt} = 0$, entonces $a_2 x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1 y^2 = 0$, o sea,

$$a_2 \left(\frac{x}{y}\right)^2 + (b_2 - a_1)\,\frac{x}{y} - b_1 = 0$$

Universidad de Antioquia. Depto. de Matematicas

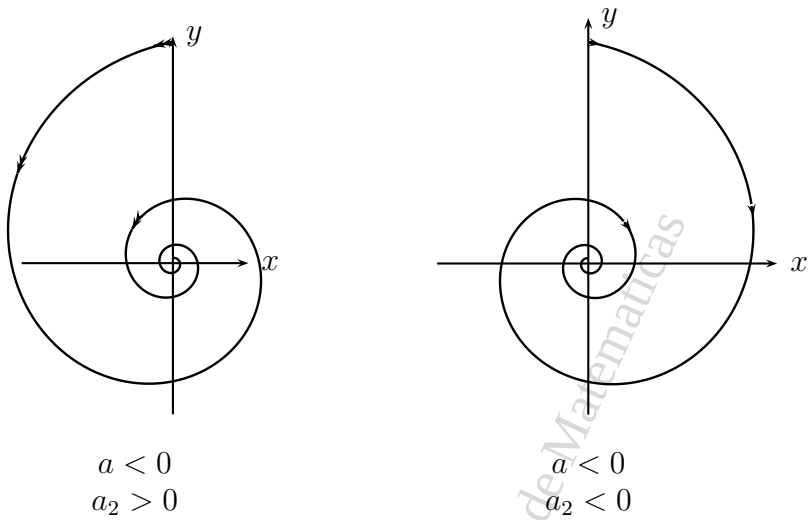


Figura 8.13 Focos (asintóticamente estables)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

ecuación cuadrática cuyo discriminante es

$$(b_2 - a_1)^2 + 4a_2b_1 = D < 0$$

según (8.24); por lo tanto $\frac{x}{y}$ es número complejo, lo cual es absurdo porque $\frac{x}{y}$ es número real.

De la continuidad de $\frac{d\theta}{dt}$, de (8.27) y de (8.28) se concluye que $\frac{d\theta}{dt} > 0$ cuando $a_2 > 0$ y $b_1 < 0$.

Similarmente, si $a_2 < 0$ y $b_1 > 0$ entonces $\frac{d\theta}{dt} < 0$.

En conclusión $\theta(t)$ es una una función siempre creciente para todo t o siempre decreciente para todo t, luego no entra al orígen.

Por (8.25) y (8.26): x y y cambian de signo infinitas veces cuando $t \to \infty$, es decir, todas las trayectorias giran en espiral alrededor del orígen en sentido contrario a las agujas del reloj si $a_2 > 0$ y en sentido horario si $a_2 < 0$. Luego el punto crítico es un foco asintóticamente estable (Ver figura 8.13).

Si $a > 0$: el análisis es el mismo, salvo que las trayectorias tienden a $(0,0)$ cuando $t \to -\infty$ y el punto crítico es inestable.

CASO D: si las raíces m_1 y m_2 son reales e iguales, el punto crítico $(0,0)$ es un nodo.

Demostración: supongamos que $m_1 = m_2 = m < 0$.
Dos casos:
i). $a_1 = b_2 \neq 0$ y $a_2 = b_1 = 0$
ii). Todas las demás posibilidades que conducen a una raíz doble.

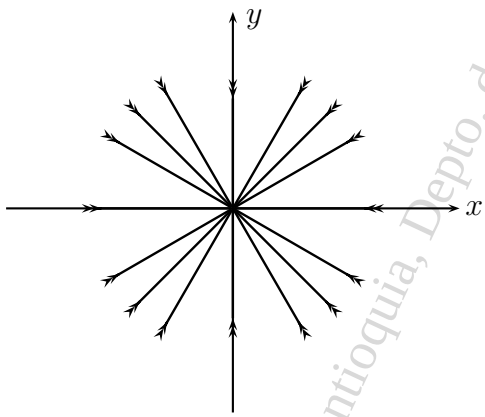


Figura 8.14 Nodo propio o nodo estrella (asintóticamente estable)

©Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

i). Si $a_1 = b_2 = a \neq 0$ entonces la ecuación característica (8.19) se convierte en $m^2 - 2am + a^2 = 0$ y por tanto $m = a$ con multiplicidad dos y el sistema de E.D. queda convertido en el sistema desacoplado siguiente

$$\frac{dx}{dt} = ax, \qquad \frac{dy}{dt} = ay.$$

Es claro que su solución general es

$$x = C_1\, e^{mt}, \qquad y = C_2\, e^{mt} \tag{8.29}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, eliminando el parámetro t, obtenemos

$$\frac{x}{y} = \frac{C_1}{C_2} \quad \text{o sea que} \quad y = \frac{C_1}{C_2}x$$

Las trayectorias definidas por (8.29) son semirrectas de todas las pendientes posibles y como $m < 0$, entonces estas trayectorias tienden y entran a $(0,0)$ cuando $t \to \infty$, de donde $(0,0)$ es un nodo (llamado también nodo propio o nodo estrella) asintóticamente estable (ver figura 8.14).
Si $m > 0$, tenemos la misma situación, excepto que las trayectorias entran a $(0,0)$ cuando $t \to -\infty$, las flechas son al contrario, entonces es un nodo (nodo propio o nodo estrella) inestable.

ii). Para raíces repetidas sabemos de (7.24) en la página 266 que para el valor propio m esta asociado el vector propio $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ y el vector propio generalizado de rango dos $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$, por lo tanto la solución general es:

$$x = C_1\, A\, e^{mt} + C_2(A_1 + At)\, e^{mt} \tag{8.30}$$

$$y = C_1\, B\, e^{mt} + C_2(B_1 + Bt)\, e^{mt} \tag{8.31}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Cuando $C_2 = 0$, entonces $x = C_1\, A\, e^{mt}$; $\quad y = C_1\, B\, e^{mt}$.

Sabemos que estas soluciones representan dos semirrectas de la recta $Ay = Bx$ con pendiente $\frac{B}{A}$ y como $m < 0$, ambas trayectorias tienden a $(0,0)$ cuando $t \to \infty$. Como $\frac{y}{x} = \frac{B}{A}$, entonces ambas trayectorias entran a $(0,0)$ con pendiente $\frac{B}{A}$.

Si $C_2 \neq 0$, entonces (8.30) y (8.31) representan trayectorias curvas y como $m < 0$, entonces estas trayectorias tienden a $(0,0)$ cuando $t \to \infty$. Además, como

$$\frac{y}{x} = \frac{C_1\, B\, e^{mt} + C_2(B_1 + Bt)\, e^{mt}}{C_1\, A\, e^{mt} + C_2(A_1 + At)\, e^{mt}}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{C_1 B}{C_2} + B_1 + Bt}{\frac{C_1 A}{C_2} + A_1 + At}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} \to \frac{B}{A} \quad \text{cuando} \quad t \to \infty.$$

Luego, estas trayectorias curvas entran a $(0,0)$ con pendiente $\frac{B}{A}$.
A este nodo se le llama nodo impropio (ver figura 8.15) y es asintóticamente estable.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

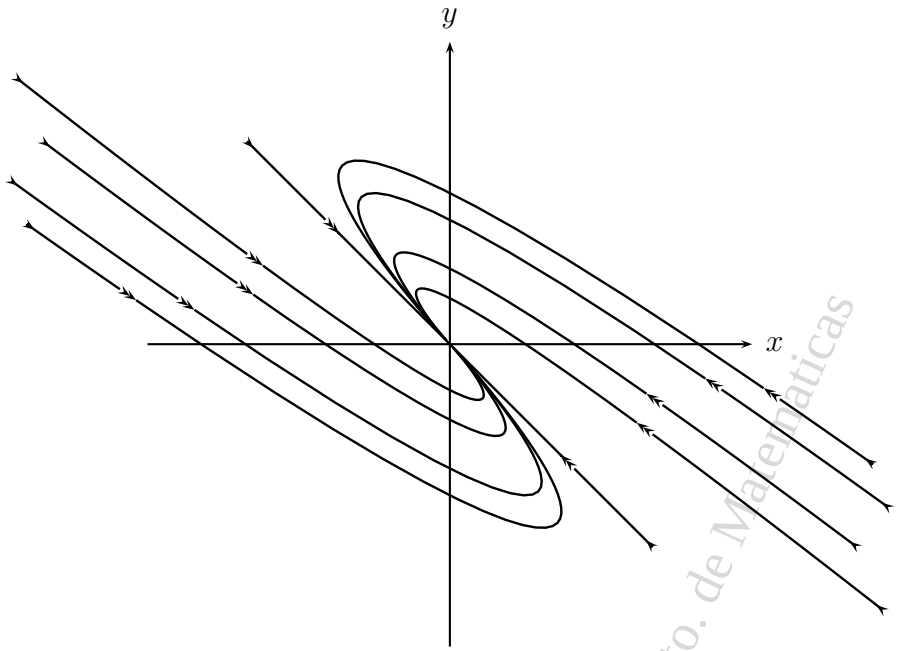


Figura 8.15 Nodo impropio (asintóticamente estable)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Cuando $m > 0$, observemos que también $\frac{y}{x} \to \frac{B}{A}$ cuando $t \to -\infty$, en este caso las trayectorias curvas salen del origen. En este caso la situación es la misma excepto que las direcciones de las flechas se invierten y el punto crítico es un nodo (impropio) inestable.

CASO E: si m_1 y m_2 son imaginarias puras, el punto crítico $(0,0)$ es un centro (ver figura 8.16).

Demostración: m_1 y m_2 son de la forma $a \pm ib$ con $a = 0$ y $b \neq 0$, luego por (7.12) en la página 256,

$$x = C_1(A_1 \cos bt - A_2 \operatorname{sen} bt) + C_2(A_1 \operatorname{sen} bt + A_2 \cos bt)$$

$$y = C_1(B_1 \cos bt - B_2 \operatorname{sen} bt) + C_2(B_1 \operatorname{sen} bt + B_2 \cos bt)$$

Luego $x(t)$ y $y(t)$ son periódicas y cada trayectoria es una curva cerrada que rodea al orígen, estas trayectorias son elipses, lo cual puede probarse resolviendo la E.D.: $\frac{dy}{dx} = \frac{a_2x+b_2y}{a_1x+b_1y}$.
Luego $(0,0)$ es un centro estable, pero no asintóticamente estable. ■

Con lo demostrado en el teorema anterior, también queda demostrado el siguiente criterio de estabilidad.

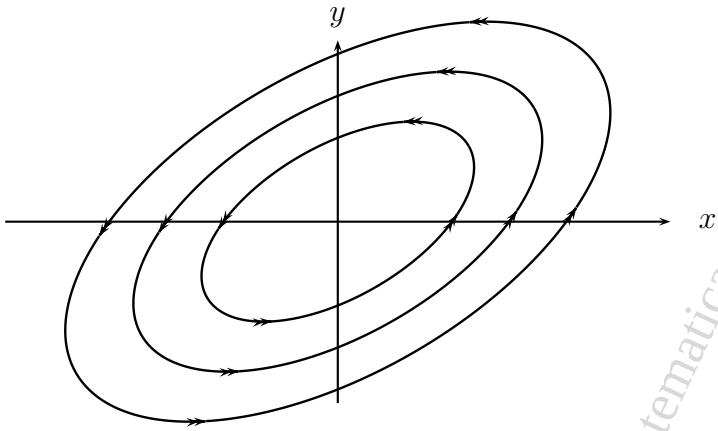


Figura 8.16 Centro (estable)

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

Teorema 8.2 (**Criterio de estabilidad).**

El punto crítico $(0,0)$*del sistema lineal (8.16) y (8.17) es estable si y solo si ambas raíces de la ecuación auxiliar (8.19) tienen partes reales no positivas, y es asintóticamente estable si y solo si ambas raíces tienen partes reales negativas.*

Escribamos la ecuación (8.19) de la forma siguiente:

$$(m-m_1)(m-m_2) = m^2-(m_1+m_2)m+m_1m_2 = m^2+pm+q = 0$$

donde $p=-(m_1+m_2)$ y $q=m_1m_2$.
Luego los cinco casos anteriores se pueden describir en términos de p y q y para ello utilizamos el plano pq (ver figura 8.17).
El eje p (o sea $q=0$), está excluido ya que por (8.19)

$$q = m_1m_2 = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Por tanto, toda la información la podemos extraer de $m_{1,2} = \frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

Observando la figura vemos que:

- Por encima de la parábola $p^2-4q=0$ se tiene $p^2-4q<0$. Luego m_1, m_2 son números complejos y estos son imaginarios puros si y solo si $p=0$; estos son los casos C y E de focos y centros.

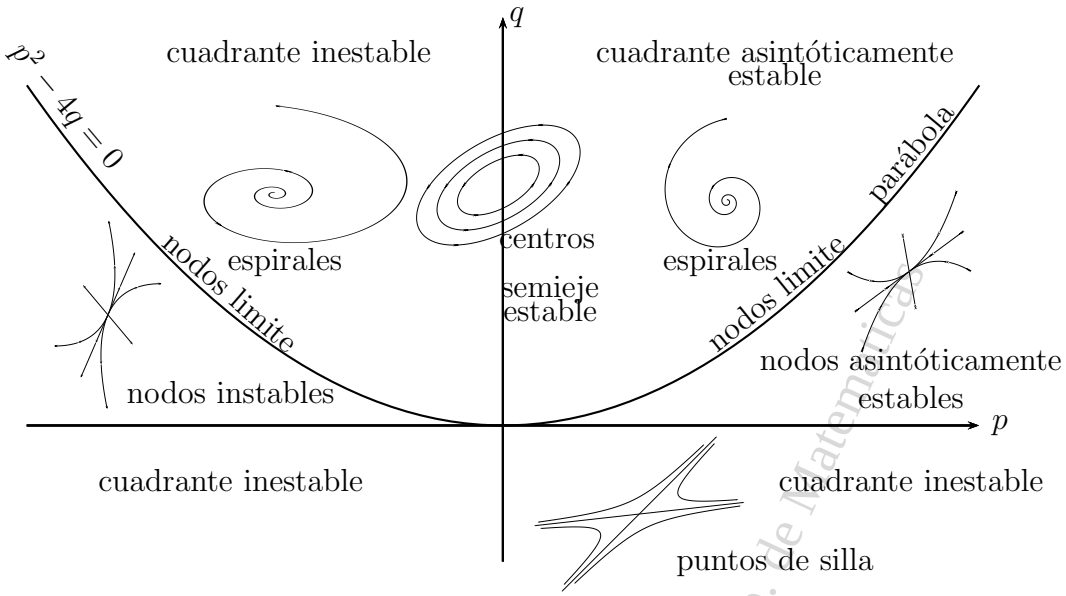


Figura 8.17

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

- Por debajo del eje p se tiene $q < 0 \Rightarrow m_1, m_2$ son reales distintos y de signos opuestos, por tanto es un punto de silla o sea el caso B.

- La zona entre la parábola y el eje p (excluido este eje e incluyendo a la parábola), se caracteriza porque $p^2 - 4q \geq 0$ y $q > 0 \Rightarrow m_1, m_2$ son reales y del mismo signo y sobre la parábola $m_1 = m_2$; por tanto son nodos y son los casos A y D.

- El primer cuadrante excluyendo los ejes, es una región con estabilidad asintótica; el eje positivo q corresponde a centros y por tanto es estable; el segundo, tercero y cuarto cuadrante son regiones inestables.

Teorema 8.3 (**Criterio para estabilidad asintótica**).

El punto crítico $(0, 0)$ *del sistema lineal (8.16) y (8.17) es asintóticamente estable si y solo si los coeficientes* $p = -(a_1 + b_2)$ *y* $q = a_1b_2 - a_2b_1$, *de la ecuación auxiliar son ambos positivos.*

En los siguientes ejercicios hallar los puntos críticos:

Ejercicio 1. $\frac{dx}{dt} = 3x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + 3y$
(**Rta:** $(0, 0)$)

Ejercicio 2. $\frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - 3y + 1$
(**Rta:** $(2, 3)$)

Ejercicio 3. $\frac{dx}{dt} = 2x - xy, \quad \frac{dy}{dt} = xy - 3y$
(**Rta:** $(0, 0)$ y $(3, 2)$)

Ejercicio 4. $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen} x$
(**Rta:** todos los puntos de la forma $(n\pi, 0)$, donde n es un entero.)

Determinar que tipo de punto crítico es el origen del sistema dado e investigue el tipo de estabilidad de cada uno:

Ejercicio 5. $\frac{dx}{dt} = -2x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y$
(**Rta:** el orígen es un nodo asintóticamente estable (es un sumidero).)

Ejercicio 6. $\frac{dx}{dt} = x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + y$
(**Rta:** el orígen es un punto silla inestable.)

Ejercicio 7. $\frac{dx}{dt} = x - 3y, \quad \frac{dy}{dt} = 6x - 5y$
(**Rta:** el orígen es un foco o punto espiral asintóticamente estable (es un sumidero).)

Ejercicio 8. $\frac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - 2y$
(**Rta:** el orígen es un foco asintóticamente estable (es un sumidero).)

Ejercicio 9. $\frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - y$
(**Rta:** el orígen es un foco o punto espiral inestable (es una fuente).)

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

8.4. CRITERIO DE ESTABILIDAD POR EL METODO DIRECTO DE LIAPUNOV

Consideremos el sistema autónomo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y), \end{aligned} \tag{8.32}$$

y supongamos que tiene un punto crítico aislado; sea $(0,0)$ dicho punto crítico (un punto crítico (x_0, y_0) se puede llevar al orígen mediante la traslación de coordenadas $x = u - x_0,\ y = v - y_0$).

Sea $\Gamma(x(t), y(t))$ una trayectoria de (8.32) y consideremos la función $E(x,y)$ continua y con primeras derivadas parciales continuas en una región que contiene a la trayectoria. Si un punto (x,y) se mueve a lo largo de las trayectorias de acuerdo a las ecuaciones $x = x(t)$ y $y = y(t)$, entonces

$$E(x,y) = E(x(t), y(t)) = E(t)$$

es una función de t sobre Γ , su razón de cambio es

$$E'(x,y) = \frac{dE}{dt} \quad = \quad \frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G \tag{8.33}$$

Esta fórmula es la idea principal de Liapunov.

Definición 8.5. *Supongamos que $E(x,y)$ es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas en una región que contiene al origen.*
Si $E(0,0) = 0$ y

i. Si $E(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, decimos que E es definida positiva.

ii. Si $E(x,y) < 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, decimos que E es definida negativa.

iii. Si $E(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, decimos que E es semidefinida positiva.

Universidad de Antioquia Depto de Matematicas

iv. *Si $E(x,y) \leq 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, decimos que E es semidefinida negativa.*

Nota:

- $E(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$ con $a > 0, b > 0$ y m, n enteros positivos, es definida positiva.
- $E(x,y)$ es definida negativa si y solo si $-E(x,y)$ es definida positiva.
- $E(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$ con $a < 0$ y $b < 0$ y m, n enteros positivos, es definida negativa.
- x^{2m} es semidefinida positiva, ya que $x^{2m} = 0$ para todo $(0,y)$ y $x^{2m} > 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.
  Similarmente se demuestra que y^{2n}, $(x-y)^{2m}$ son semidefinidas positivas.
- Si $E(x,y)$ es definida positiva, entonces $z = E(x,y)$ es la ecuación de una superficie que podría parecerse a un paraboloíde abierto hacia arriba y tangente al plano XY en el orígen (ver figura 8.18).

Definición 8.6 (función de Liapunov). *Decimos que $E(x,y)$ es una función de Liapunov para el sistema* (8.32)*, si*

- *$E(x,y)$ es continua, con primeras derivadas parciales continuas en una región que contiene al orígen.*
- *$E(x,y)$ es definida positiva.*
- *Existe la derivada de E a lo largo de las trayectorias u órbitas del sistema* (8.32) *y sea menor o igual que cero sobre la trayectoria, es decir, que exista la siguiente derivada,*

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G = \frac{dE}{dt}(x,y) = E'(x(t), y(t)) \leq 0 \tag{8.34}$$

- *cuando $\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G = \frac{dE}{dt}(x,y) = E'(x(t), y(t)) < 0$, decimos que $E(x,y)$ es una función de Liapunov estricta.*

Universidad de Antioquia Depto. de Matemáticas

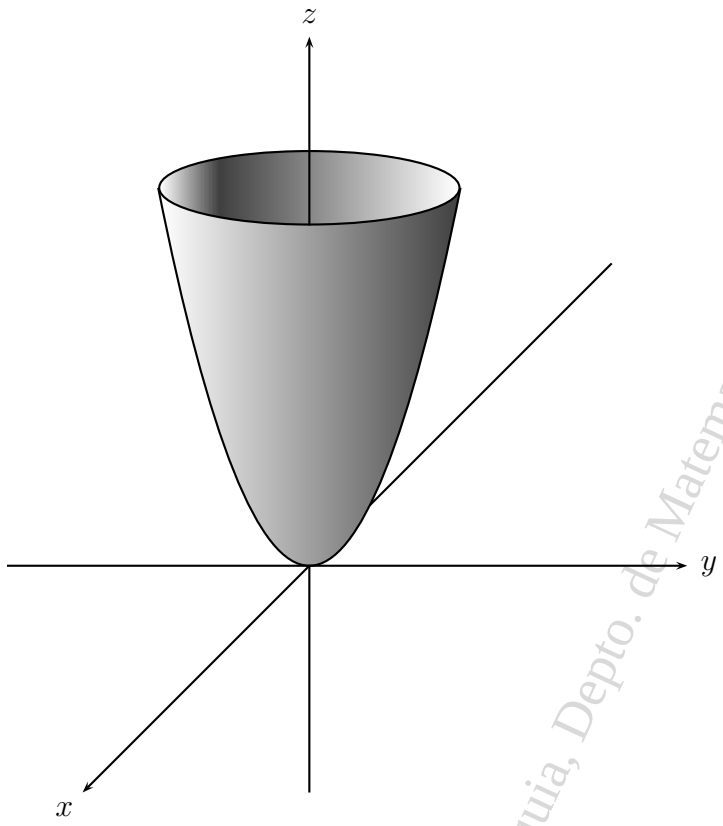


Figura 8.18

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Nota:

- Si (8.34) fuera semidefinida negativa implíca que

$$E'(x,y) = \frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}\,F + \frac{\partial E}{\partial y}\,G \leq 0$$

  y esto implíca que E es no creciente a lo largo de las trayectorias de (8.32) próximas al orígen.

- Por lo anterior las funciones E generalizan el concepto de energía total de un sistema físico.

Teorema 8.4 (**Criterio de Liapunov).**

a. *Si existe una función de Liapunov para el sistema* (8.32) *entonces el punto crítico* $(0,0)$ *es estable.*

b. *Si existe una función de Liapunov estricta para el sistema* (8.32) *entonces el punto crítico* $(0,0)$ *es asintóticamente estable.*

c. *Si* $E'(x,y)$ *es definida positiva entonces* $(0,0)$ *es un punto crítico inestable.*

Universidad de Antioquia Depto de Matemáticas

Demostración: sea C_1 un circunferencia de radio $R > 0$ centrado en el orígen de tal manera que C_1 se halla dentro del dominio de definición de la función E. Como $E(x,y)$ es continua y definida positiva, tiene un mínimo positivo m en C_1. Además, $E(x,y)$ es continua en el orígen y se anula en él, luego podemos hallar un número positivo $r < R$ tal que $0 \leq E(x,y) < m$ si (x,y) está dentro de la circunferencia C_2 de radio r (Ver figura 8.19).

Sea $\Gamma(x(t),y(t))$ cualquier trayectoria que esté dentro de C_2 para $t = t_0$, entonces $E(t_0) < m$ y como (8.34) es semidefinida negativa, entonces $\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G \leq 0$ lo cual implíca que $E(t) \leq E(t_0) < m$ para todo $t > t_0$, luego la trayectoria Γ nunca puede alcanzar la cirdunferencia C_1 en un $t > t_0$ lo cual implíca que hay estabilidad.

Probemos la segunda parte del teorema.
Probemos que, bajo la hipótesis adicional ($\frac{dE}{dt} < 0$), $E(t) \to 0$, porque al ser $E(x,y)$ definida positiva, implíca que Γ se aproxima al punto crítico $(0,0)$.

Como $\frac{dE}{dt} < 0$, entonces $E(t)$ es decreciente y como $E(t)$ está acotada inferiormente por 0, entonces $E(t)$ tiene un límite $L \geq 0$ cuando $t \to \infty$.

Supongamos que $L > 0$. Sea $\overline{r} < r$ (ver figura 8.19) tal que $E(x,y) < L$ para (x,y) dentro de la circunferencia C_3 de radio $\overline{r}$, como la función (8.34) es continua y definida negativa, tiene un máximo negativo $-k$ en el anillo limitado por las circunferencias C_1 y C_3. Este anillo contiene a toda trayectoria Γ para $t \geq t_0$, luego de la ecuación

$$E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dE}{dt}\,dt \quad \text{y} \quad \frac{dE}{dt} \leq -k$$

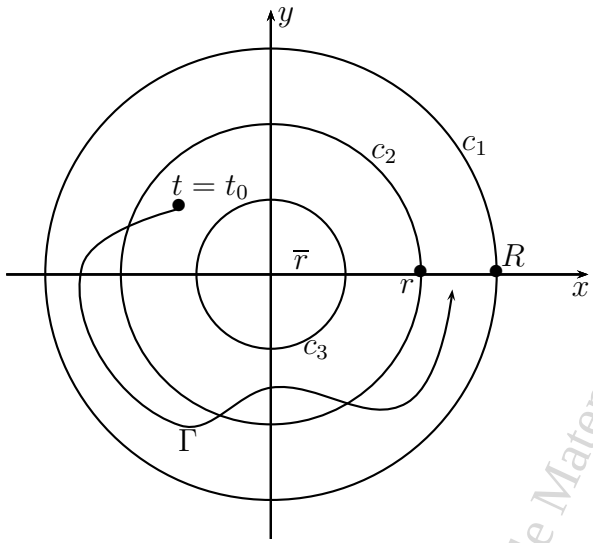


Figura 8.19

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

se obtiene la desigualdad:

$$E(t) \leq E(t_0) - k(t - t_0) \; \forall t \geq t_0$$

Pero el lado derecho de la desigualdad tiende a $-\infty$ cuando $t \to \infty$, es decir, $\lim\limits_{t\to\infty} E(t) = -\infty$, pero $E(x, y) \geq 0$ (Absurdo!), luego $L = 0$. ■

Ejemplo 4. La E.D. de una masa m sujeta a un resorte de constante k, en un medio que ofrece un amortiguamiento de coeficiente C es

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + C\,\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

donde $C \geq 0,\ k > 0$. Analizar la estabilidad de su punto crítico.
<u>Solución</u>:

El sistema autónomo equivalente es:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}\,x - \frac{C}{m}\,y$$

Su único punto crítico es $(0, 0)$. La energía cinética es $\frac{my^2}{2}$ y la energía potencial (o energía almacenada en el muelle) es $\int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}\,kx^2$

Luego la energía total: $E(x,y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2$ la cual es definida positiva, como

$$\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G = kxy + my\left(-\frac{k}{m}x - \frac{C}{m}y\right) = -Cy^2 \leq 0$$

Luego, $E(x,y)$ es una función Liapunov para el sistema y por tanto $(0,0)$ es estable.
Se sabe que si $C > 0$ el punto crítico $(0,0)$ es asintóticamente estable, pero la función Liapunov no detecta este hecho.

Ejemplo 5. (Resorte no lineal). Este es un ejemplo de una masa $m = 1$ sujeta a un resorte no lineal, en el cual la fuerza restauradora es una función de la distancia de la masa al origen, sea $-f(x)$ una función no lineal que representa la fuerza restauradora tal que $f(0) = 0$ y $xf(x) > 0$ si $x \neq 0$; no hay fricción. La E.D. de su movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0$$

Analizar la estabilidad de su punto crítico.

<u>Solución</u>: el sistema autónomo equivalente es

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -f(x) \end{aligned}$$

Su único punto crítico es $(0,0)$. La energía cinética es $\frac{1}{2}x'^2 = \frac{1}{2}y^2$ y la energía potencial es

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

y la energía total es

$$E(x,y) = F(x) + \frac{y^2}{2}$$

Como x, $f(x)$ tienen el mismo signo entonces $F(x) \geq 0$ y por tanto $E(x,y)$ es definida positiva. Además

$$E'(x,y) = F'(x)x' + yy' = f(x)y + y(-f(x)) = 0$$

es decir, es semidefinida negativa y por el teorema el punto crítico $(0,0)$ es estable. Igual que sucede con un resorte lineal, se puede demostrar que este

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

punto crítico es un centro.

Ejemplo 6. Analicemos la estabilidad del punto crítico del siguiente sistema

$$x' = -x - \frac{x^3}{3} - x \operatorname{sen} y,$$
$$y' = -y - \frac{y^3}{3}$$

Solución:
$(0,0)$ es el único punto crítico. Sea $E(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, luego

$$E'(x,y) = x(-x - \frac{x^3}{3} - x \operatorname{sen} y) + y(-y - \frac{y^3}{3}) = -x^2 - \frac{x^4}{3} - y^2 - \frac{y^4}{3} - x^2 \operatorname{sen} y$$

pero $|x^2 \operatorname{sen} y| \leq x^2$ y por tanto $x^2 + x^2 \operatorname{sen} y \geq 0$. Entonces

$$E'(x,y) = -\frac{x^4}{3} - y^2 - \frac{y^4}{3} - (x^2 + x^2 \operatorname{sen} y) \leq -\frac{x^4}{3} - y^2 - \frac{y^4}{3} < 0$$

para $(x,y) \neq (0,0)$, es decir E' es definida negativa y por el teorema anterior, parte b., $(0,0)$ es asintóticamente estable.

Ejemplo 7. Analizar la estabilidad del punto crítico del siguiente sistema

$$\frac{dx}{dt} = -2xy; \qquad \frac{dy}{dt} = x^2 - y^3$$

Solución:

$(0,0)$ es punto crítico aislado

$$E(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$$
$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G = 2max^{2m-1}(-2xy) + 2nby^{2n-1}(x^2 - y^3)$$
$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G = (-4max^{2m}y + 2nbx^2y^{2n-1}) - 2nby^{2n+2}$$

Para que el paréntesis se anule, necesitamos que $m = 1$, $n = 1$, $a = 1$, $b = 2, \Rightarrow E(x,y) = x^2 + 2y^2$ la cual es definida positiva y

$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G = -4y^4$$

Universidad de Antioquia, Dep. de Matematicas

que es semidefinida negativa, luego $(0,0)$ es estable.

Teorema 8.5.

La función $E(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es:

- *Definida positiva si y solo si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$.*
- *Semidefinida positiva si y solo si $a > 0$ y $b^2 - 4ac \leq 0$*
- *Definida negativa si y solo si $a < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$*
- *Semidefinida negativa si y solo si $a < 0$ y $b^2 - 4ac \leq 0$*

Demostración. Veamos la primera parte.
Si $y = 0$ entonces $E(x,0) = ax^2 > 0$ si $x \neq 0$ y $a > 0$
Si

$$y \neq 0 : E(x,y) = y^2 \left[a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\left(\frac{x}{y}\right) + c \right]$$

y si $a > 0$, el polinomio cuadrático en $\frac{x}{y}$ es positivo para todo $\frac{x}{y}$
$\Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0$. ■

Ejercicio 1. Determinar si cada una de las siguientes funciones estan definidas positivas, negativas o semidefinidas positivas o negativas o ninguna de las anteriores.
a) $x^2 - xy - y^2$, b) $2x^2 - 3xy + 3y^2$, c)$-2x^2 + 3xy - y^2$, d) $-x^2 - 4xy - 5y^2$.
(**Rta.:** a) Ninguna de las anteriores, b) Definida positiva, c) Ninguna de las anteriores, d) Definida negativa)

Ejercicio 2. Dado el sistema $\frac{dx}{dt} = xy^2 - \frac{x^3}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{y^3}{2} - \frac{yx^2}{5}$
Mostrar que $(0,0)$ es asintóticamente estable (Ayuda: tomar $V(x,y) = ax^2 + by^2$).

Ejercicio 3. Dado el sistema $\frac{dx}{dt} = -6x^2y, \quad \frac{dy}{dt} = -3y^3 + 6x^3$
Mostrar que $(0,0)$ es estable.

Ejercicio 4. Dado el sistema $\frac{dx}{dt} = -3x^3 - y, \quad \frac{dy}{dt} = x^5 - 2y^3$
Mostrar que $(0,0)$ es asintóticamente estable.

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

Ejercicio 5. Dado el sistema $\frac{dx}{dt} = -2x + xy^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x^2y^2 - y^3$
Mostrar que $(0,0)$ es asintóticamente estable.

Ejercicio 6. Mostrar que $(0,0)$ es un punto crítico inestable del sistema $x' = F(x,y)$, $y' = G(x,y)$, si existe una función $E(x,y)$ con las siguientes propiedades:
a) $E(x,y)$ es continua, con primeras derivadas parciales continuas en una región del plano que contiene al origen.
b) $E(0,0) = 0$.
c) Todo círculo centrado en el origen, contiene al menos un punto para el cual $E(x,y)$ es positiva.
d) $(\frac{\partial E}{\partial x})F + (\frac{\partial E}{\partial y}G)$ es definida positiva.

Ejercicio 7. Utilizando el ejercicio anterior mostrar que $(0,0)$ es inestable para el sistema $\frac{dx}{dt} = 2xy + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x^2 + y^5$

Ejercicio 8. Sea $f(x)$ una función tal que $f(0) = 0$ y $xf(x) > 0$ para $x \neq 0$ (es decir, $f(x) > 0$ si $x > 0$ y $f(x) < 0$ si $x < 0$)
a) Mostrar que $E(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(x)\,dx$ esta definida positiva.
b) Mostrar que $(0,0)$ es un punto crítico estable del la E.D. $\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0$
c) Si $g(x) \geq 0$ en un círculo alrededor del origen, mostrar que $(0,0)$ es un punto crítico estable del sistema

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x)\frac{dx}{dt} + f(x) = 0$$

Ejercicio: 9. Dado el sistema $x' = y - xf(x,y)$, $y' = -x - yf(x,y)$, donde $f(0,0) = 0$ y $f(x,y)$ tiene un desarrollo en serie de potencias convergente en una región R alrededor del origen. Demostrar que el punto crítico $(0,0)$ es

- estable si $f(x,y) \geq 0$ en alguna región alrededor de $(0,0)$.
- asintóticamente estable si $f(x,y)$ es definida positiva en alguna región alrededor de $(0,0)$.
- inestable si en toda región alrededor de $(0,0)$ hay puntos (x,y) tales que $f(x,y) < 0$.

Ejercicio: 10. Mediante el ejercicio anterior determinar la estabilidad de los siguientes sistemas
a) $x' = y - x(y^3 \operatorname{sen}^2 x)$, $y' = -x - y(y^3 \operatorname{sen}^2 x)$.

Universidad de Antioquia Depto. de Matematicas

b) $x' = y - x(x^4 + y^6)$, $y' = -x - y(x^4 + y^6)$.
a) $x' = y - x(\operatorname{sen}^2 y)$, $y' = -x - y(\operatorname{sen}^2 y)$.
(**Rta.:** a) Inestable, b) Asintóticamente estable, c) Estable.)

Ejercicio: 11. Considere la ecuación

$$x'' + f(x, x') + g(x) = 0$$

y suponga que f y g tienen primeras derivadas continuas y $f(0,0) = g(0) = 0$ y $yf(x,y) > 0$ cuando $y \neq 0$ y $xg(x) > 0$ cuando $x \neq 0$. Transforme la anterior E.D. en un sistema y luego demuestre que el punto crítico $(0,0)$ es estable.

Ejercicio: 12. Con el resultado del anterior ejercicio, demostrar la estabilidad de la E.D.

$$x'' + (x')^3 + x^5 = 0$$

8.5. LINEALIZACION DE SISTEMAS NO LINEALES

Consideremos el sistema autónomo

$$x' = F(x,y), \quad y' = G(x,y), \tag{8.35}$$

con un punto crítico aislado en (x_0, y_0) (es decir $F(x_0, y_0) = 0$ y $G(x_0, y_0) = 0$). Si $F(x,y)$ y $G(x,y)$ se pueden desarrollar en series de potencias de $u = x - x_0$ y $v = y - y_0$, entonces utilizando un desarrollo Taylor alrededor de (x_0, y_0), (8.35) adopta la forma

$$\begin{aligned} u' &= x' = F(x_0 + u, y_0 + v) \\ &= F(x_0, y_0) + u\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + v\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + O(u, v, uv) \\ &= u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + O(u, v, uv) \end{aligned} \tag{8.36}$$

donde las derivada parciales son evaluadas en (x_0, y_0) o sea son números y $O(u, v, uv)$ denota el resto de términos en u^n, v^n, $u^i v^j$, con $n \geq 2$ e $i + j \geq 2$. Similarmente

$$v' = u\frac{\partial G}{\partial x} + v\frac{\partial G}{\partial y} + O'(u, v, uv) \tag{8.37}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

escribiendo matricialmente lo anterior, tenemos

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(u,\, v,\, uv) \\ O'(u,\, v,\, uv) \end{bmatrix} \tag{8.38}$$

La matriz

$$J(F(x,y), G(x,y))_{(x_0,y_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

se le llama la matriz Jacobiana del sistema (8.35) evaluada en el punto crítico (x_0, y_0). Cuando $|u|$, $|v|$ son pequeños, es decir, cuando $(u, v) \to (0, 0)$ los términos de segundo orden y de orden superior son pequeños. Despreciando estos términos, conjeturamos que el comportamiento cualitativo de (8.36) y (8.37) cerca al punto crítico (x_0, y_0) es similar al del sistema lineal asociado:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{8.39}$$

donde

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \neq 0$$

observemos que si (x_0, y_0) es un punto crítico en el sistema de coordenadas XY entonces $(0, 0)$ es el punto crítico en el nuevo sistema de coordenadas UV, por esto los teoremas que haremos en esta sección están referidos al punto crítico $(0, 0)$ El proceso anterior de sustituir (8.35) por (8.39) se le llama linealización de (8.35) en el punto crítico (x_0, y_0).
En forma general consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x + b_1 y + f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 x + b_2 y + g(x, y) \end{aligned} \tag{8.40}$$

donde $a_1 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\quad b_1 = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$, $\quad a_2 = \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\quad b_2 = \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)$
y

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad G(x_0, y_0) = 0,$$

supongamos también que

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0, \tag{8.41}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

de tal manera que el sistema lineal asociado tiene a $(0,0)$ como punto crítico aislado y supongamos que f y g son funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas para todo (x,y) y que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \tag{8.42}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \tag{8.43}$$

Estas dos últimas condiciones implican, debido a la continuidad de f y g, que $f(0,0)=0$ y $g(0,0)=0$, es decir, $(0,0)$ es punto crítico de (8.40) . Se puede demostrar que este punto es aislado. Con las restricciones indicadas $(0,0)$ se le llama **punto crítico simple** de (8.40).
Cuando se cumplen (8.50), (8.42), (8.43), entonces decimos que el sistema (8.40) es un sistema casi lineal (o cuasi-lineal).

Ejemplo 6. Comprobar que se cumple (8.50), (8.42) y (8.43) para el siguiente sistema

$$\frac{dx}{dt} = -2x+3y+xy; \quad \frac{dy}{dt} = -x+y-2xy^2$$

<u>Solución</u>:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

También, usando coordenadas polares:

$$\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|r^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta|}{r} \leq r$$

y

$$\frac{|g(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|2r^3 \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta|}{r} \leq 2r^2$$

Cuando $(x,y)\to(0,0)$ entonces

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(x,y)}{r} = 0, \qquad \lim_{r\to 0}\frac{g(x,y)}{r} = 0$$

Luego $(0,0)$ es un punto crítico simple del sistema.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Teorema 8.6 (**Tipo de punto crítico para sistemas no lineales**).

Sea $(0,0)$ *un punto crítico simple del sistema no lineal (8.40) y consideremos el sistema lineal asociado . Si el punto crítico* $(0,0)$ *del sistema lineal asociado pertenece a alguno de los tres casos principales del teorema* (8.1), *sección (8.3) , entonces el punto crítico* $(0,0)$ *de (8.40) es del mismo tipo.*

Ejemplo 7. Continuando con el ejemplo anterior, analicemos el tipo de punto crítico.

El sistema lineal asociado al no lineal es

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y$$

La ecuación característica es: $m^2 + m + 1 = 0$
con raíces m_1, $m_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.
Como las raíces son complejas conjugadas y no imaginarias puras, estamos en el CASO C, lo cual quiere decir que $(0,0)$ es un foco y por el **Teorema 8.6** el punto crítico $(0,0)$ del sistema no lineal es también un foco.

Nota: aunque el tipo de punto crítico $(0,0)$ es el mismo para para el sistema lineal y para el sistema no lineal , la apariencia de las trayectorias puede ser bien diferente. La figura 8.20 muestra un punto de silla para un sistema no lineal, en el cual se nota cierta distorsión, pero los rasgos cualitativos de las dos configuraciones son los mismos.

Observación: para los casos frontera no mencionados en el **Teorema 8.6**:

- Si el sistema lineal asociado tiene un nodo frontera en $(0,0)$ (CASO D), el sistema no lineal puede tener un nodo o un foco.

- Si el sistema lineal asociado tiene un centro en $(0,0)$ (CASO E), entonces el sistema no lineal puede tener un centro o un foco.

Ejemplo 8. Consideremos el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -y + ax(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + ay(x^2 + y^2)$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

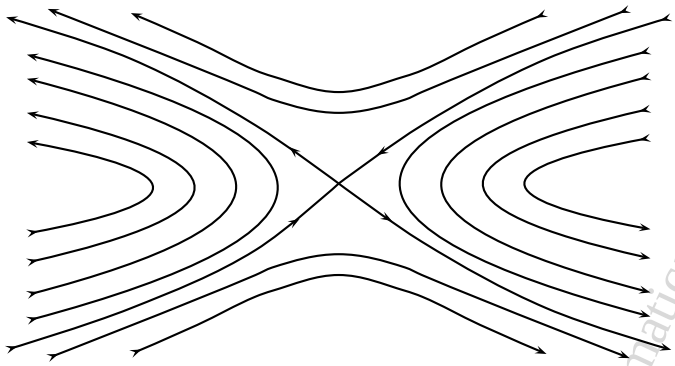


Figura 8.20

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

donde a es un parámetro. Mostrar que la linealización predice un centro o un foco en el origen. Mostrar que realmente corresponde a un foco.

El sistema lineal asociado es:

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x$$

Para este último (el lineal): $(0,0)$ es un centro. Pero para el sistema no lineal, $(0,0)$ es un foco.
Para mostrar que es un foco, cambiemos el sistema de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Sea $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ y $r^2 = x^2 + y^2$, luego $rr' = xx' + yy'$ y sustituyendo en esta expresión a x', y' se tiene que

$$rr' = x(-y + ax(x^2+y^2)) + y(x + ay(x^2+y^2)) = a(x^2+y^2)^2 = ar^4,$$

por lo tanto $r' = ar^3$.
Como $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, entonces derivando θ con respecto a t y sustituyendo a x', y', se obtiene

$$\theta' = \frac{xy' - yx'}{r^2} = 1$$

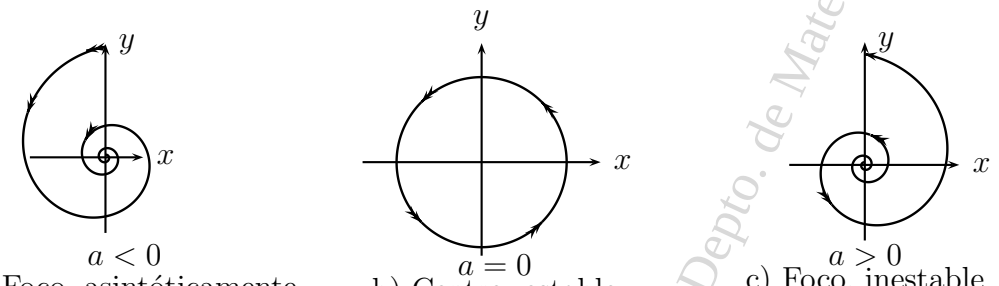
obtenemos el sistema en coordenadas polares

$$r' = ar^3, \quad \theta' = 1$$

este sistema es fácil de analizar, ya que r' depende solo de r y θ' es constante, la solución es la familia de espirales

$$r = \frac{1}{\sqrt{C - 2at}}, \quad \theta = t + t_0,$$

luego si $a < 0$ entonces $\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$ o sea que el origen es asintóticamente estable (es un sumidero) y si $a > 0$ entonces $\lim_{t\to-\infty} r(t) = 0$ o sea que el origen es inestable (es una fuente), si $a = 0$ entonces $r = r_0$ o sea que el origen es un centro (Ver figura 8.21). Obsérvese que $a = 0$ es un punto de bifurcación.



$a < 0$
Foco, asintóticamente estable

$a = 0$
b) Centro, estable

$a > 0$
c) Foco, inestable

Figura 8.21

Nota: ¿Qué sucede con los puntos críticos no simples?
Si los términos no lineales en (8.40) no determinan la disposición de las trayectorias cerca del orígen, entonces hay que considerar los términos de segundo grado, si estos tampoco, entonces se consideran los términos de tercer grado y así sucesivamente; el ejemplo siguiente tiene que ver con estos casos.

Ejemplo 8.

$$\frac{dx}{dt} = 2xy; \quad \frac{dy}{dt} = y^2 - x^2 \tag{8.44}$$

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - 2xy^2; \quad \frac{dy}{dt} = 2x^2y - y^3 \tag{8.45}$$

$$\frac{dx}{dt} = x - 4y\sqrt{|xy|}; \quad \frac{dy}{dt} = -y + 4x\sqrt{|xy|} \tag{8.46}$$

Estos tres casos los analizaremos con el paquete Maple al final del capítulo.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemática

Teorema 8.7 (**Estabilidad para sistemas no lineales).**

Sea $(0,0)$ *un punto crítico simple del sistema no lineal (8.40) y consideremos el sistema lineal asociado .*

1. *Si el punto crítico* $(0,0)$ *del sistema lineal asociado es asintóticamente estable, entonces el punto crítico* $(0,0)$ *de (8.40) también es asintóticamente estable.*
2. *Si el punto crítico* $(0,0)$ *del sistema lineal asociado es inestable, entonces el punto crítico* $(0,0)$ *del sistema no lineal (8.40) es inestable.*
3. *Si el punto crítico* $(0,0)$ *del sistema lineal asociado es estable, pero no asintóticamente estable, entonces el punto crítico* $(0,0)$ *del sistema no lineal (8.40) puede ser estable, asintóticamente estable o inestable .*

Demostración: consideremos el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x + b_1y + f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2x + b_2y + g(x,y) \end{aligned} \tag{8.47}$$

y su sistema lineal asociado

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} &= a_2x + b_2y \end{aligned} \tag{8.48}$$

de acuerdo al Teorema 8.4 se debe construir una función de Liapunov adecuada.
Por el Teorema (8.3) los coeficientes del sistema lineal asociado satisfacen las condiciones:

$$p = -(a_1 + b_2) > 0$$

$$q = a_1b_2 - a_2b_1 > 0$$

Sea

$$E(x,y) = \frac{1}{2}\left(ax^2 + 2bxy + cy^2\right),$$

donde

$$a = \frac{a_2^2 + b_2^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)}{D}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

$$b = -\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{D}$$

$$c = \frac{a_1^2 + b_1^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)}{D}$$

y

$$D = p\,q = -(a_1 + b_2)(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Luego $D > 0$ y $a > 0$
También

$$\begin{aligned}
D^2(ac - b^2) &= DaDc - D^2b^2 \\
&= [a_2^2 + b_2^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)][a_1^2 + b_1^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)] - (a_1a_2 + b_1b_2)^2 \\
&= (a_2^2 + b_2^2)(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2 + a_1^2 + b_1^2)(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&+ (a_1b_2 - a_2b_1)^2 - (a_1a_2 + b_1b_2)^2 = \\
&= (a_2^2 + b_2^2 + a_1^2 + b_1^2)(a_1b_2 - a_2b_1) + 2(a_1b_2 - a_2b_1)^2 > 0
\end{aligned}$$

Luego, $b^2 - ac < 0$, entonces por Teorema 8.5 tenemos que $E(x, y)$ es definida positiva, además

$$\frac{\partial E}{\partial x}(a_1x + b_1y) + \frac{\partial E}{\partial y}(a_2x + b_2y) = -(x^2 + y^2),$$

la cual es definida negativa, luego $E(x, y)$ es una función de Liapunov para el sistema lineal asociado.

Veamos que $E(x, y)$ es una función de Liapunov para (8.47) :
Definamos

$$F(x, y) = a_1x + b_1y + f(x, y)$$

$$G(x, y) = a_2x + b_2y + g(x, y)$$

Se sabe que $E(x, y)$ es definida positiva. Veamos que

$$\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G \tag{8.49}$$

es definida negativa. En efecto

$$\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G = \frac{\partial E}{\partial x}(a_1x + b_1y + f(x, y)) + \frac{\partial E}{\partial y}(a_2x + b_2y + g(x, y))$$

Universidad de Antioquia, Depto de Matematicas

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial E}{\partial x}(a_1x + b_1y) + \frac{\partial E}{\partial x} f(x,y) \\
&+ \frac{\partial E}{\partial y}(a_2x + b_2y) + \frac{\partial E}{\partial y}\, g(x,y) \\
&= -(x^2+y^2) + (ax+by)f(x,y) + (bx+cy)g(x,y)
\end{aligned}
$$

Pasando a coordenadas polares:

$$= -r^2 + r[(a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta)f(x,y) + (b\cos\theta + c\,\mathrm{sen}\,\theta)g(x,y)]$$

Sea $k = max\{|a|, |b|, |c|\}$. Por (8.42) y (8.43):

$$|f(x,y)| < \frac{r}{6k} \quad ; \quad |g(x,y)| < \frac{r}{6k}$$

para $r > 0$ suficientemente pequeño.
Luego:

$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G < -r^2 + \frac{4kr^2}{6k} = -\frac{r^2}{3} < 0,$$

para r pequeño. Luego $E(x,y)$ es una función definida positiva y $\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G$ es definida negativa; luego por Teorema de Liapunov 8.4 parte b., $(0,0)$ es un punto crítico asintóticamente estable de (8.47) . ■

Nota: en el caso 2. del Teorema anterior se puede debilitar la hipótesis con la condición

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = 0, \tag{8.50}$$

y dejar las otras condiciones (8.42 y 8.43) y el resultado también se produce, es decir, si el punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal asociado es inestable, entonces el punto crítico $(0,0)$ del sistema no lineal (8.40) es inestable.

Ejemplo 9. Consideremos el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 3y + xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y - 2xy^2$$

Del sistema podemos concluir que

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Es claro que $(0,0)$ es un punto crítico simple, en este caso

$$p = -(a_1 + b_2) = -(-2+1) = 1 > 0$$

$$q = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1 > 0$$

Luego el punto crítico $(0,0)$ es asintóticamente estable para el sistema lineal asociado, como para el no lineal.

Ejemplo 10. La ecuación del movimiento para las oscilaciones forzadas de un péndulo es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{g}{a}\operatorname{sen} x = 0; \quad c > 0$$

El sistema no lineal es:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{a}\operatorname{sen} x - \frac{c}{m}y$$

La cual es puede escribir así:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{a}x - \frac{c}{m}y + \frac{g}{a}(x - \operatorname{sen} x)$$

Se puede ver que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

En efecto, si $x \neq 0$:

$$\frac{|x - \operatorname{sen} x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x - \operatorname{sen} x|}{|x|} = \left|1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \to 0$$

Como $(0,0)$ es un punto crítico aislado del sistema lineal asociado

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{a}x - \frac{c}{m}y$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

entonces $(0,0)$ es un punto crítico simple del no lineal, además

$$p = -(a_1 + b_2) = -\left(0 - \frac{c}{m}\right) = \frac{c}{m} > 0$$

$$q = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0\left(-\frac{c}{m}\right) - 1\left(-\frac{g}{a}\right) = \frac{g}{a} > 0$$

Luego $(0,0)$ es un punto crítico asintóticamente estable del sistema lineal asociado y por el Teorema 8.7 también lo es del sistema no lineal. Esto refleja el hecho físico: que si un péndulo se perturba ligeramente el movimiento resultante se extinguirá con el tiempo.

Ejemplo 11. Hallar los puntos críticos, determinar de que tipo son y su estabilidad, para el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x' &= -2xy = F(x,y) \\ y' &= -x + y + xy - y^3 = G(x,y) \end{aligned}$$

La matriz Jacobiana es

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y & -2x \\ -1+y & 1+x-3y^2 \end{bmatrix}$$

Para hallar los puntos críticos resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= -2xy = F(x,y) \\ 0 &= -x + y + xy - y^3 = G(x,y) \end{aligned}$$

luego $xy = 0$, sustituimos en la segunda ecuación y nos da $y = 0$, $y = 1$, $y = -1$, por tanto los puntos críticos son $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$. Analicemos cada punto por separado

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

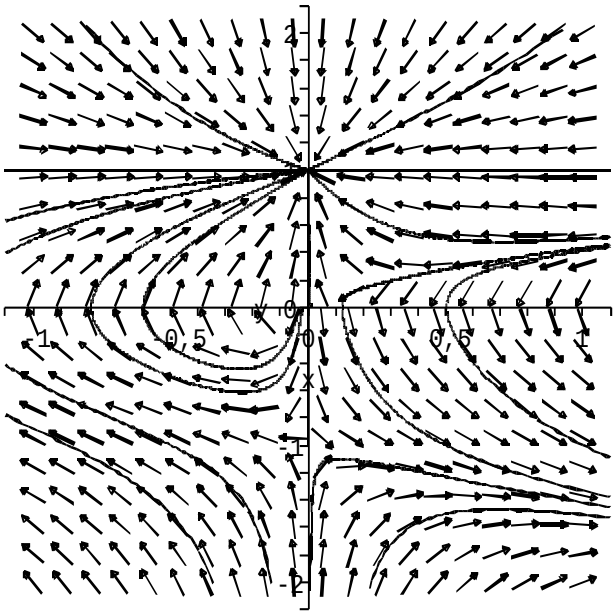


Figura 8.22

1. Para $(0,0)$ tenemos que la matriz Jacobiana en $(0,0)$ es

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial G}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   y su determinante es cero. Por lo tanto el punto crítico $(0,0)$ no es un punto crítico simple y por esto no lo podemos clasificar.
   Como la ecuación característica es

$$\lambda^2 - \lambda = 0,$$

   entonces los valores propios son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$, por lo tanto el sistema lineal asociado es inestable y por la nota que se hizo al teorema 8.7, el sistema no lineal también es inestable en $(0,0)$. De la figura 8.22, vemos que $(0,0)$ es una fuente, o sea que es un punto inestable (asintóticamente inestable).

2. Para $(0,1)$ tenemos que la matriz Jacobiana en $(0,1)$ es

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial F}{\partial y}(0,1) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial G}{\partial y}(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

y su determinante es diferente de cero.

Haciendo $u = x - x_0 = x - 0 = x$ y $v = y - y_0 = y - 1$. El sistema lineal asociado es

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{8.51}$$

$$\begin{aligned} u' &= a_1 u + b_1 v = -2u \\ v' &= a_2 u + b_2 v = -2v \end{aligned}$$

cuyo punto crítico en el sistema uv es $(0, 0)$ y en el sistema xy es $(0, 1)$. Los valores propios del sistema lineal asociado son $\lambda_1 = \lambda_1 = -2 < 0$ y por el Teorema 8.1 caso D. el punto crítico es un nodo estrella y por Teorema 8.2 es asintóticamente estable para el sistema lineal asociado; entonces para el sistema no lineal, por la observación al Teorema 8.6 referente a los casos frontera y por el Teorema 8.7, $(0, 1)$ es un nodo o un foco asintóticamente estable.

3. Para $(0, -1)$ tenemos que la matriz Jacobiana en $(0, -1)$ es

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(0, -1) & \frac{\partial F}{\partial y}(0, -1) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0, -1) & \frac{\partial G}{\partial y}(0, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

y su determinante es diferente de cero.
Haciendo $u = x - x_0 = x - 0 = x$ y $v = y - y_0 = y - (-1) = y + 1$. El sistema lineal asociado es

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{8.52}$$

$$\begin{aligned} u' &= a_1 u + b_1 v = 2u \\ v' &= a_2 u + b_2 v = -2u - 2v \end{aligned}$$

cuyo punto crítico en el sistema uv es $(0, 0)$ y en el sistema xy es $(0, -1)$. Los valores propios del sistema lineal asociado son $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$ y por el Teorema 8.1 caso B. el punto crítico es un punto de silla y por Teorema 8.2 es inestable para el sistema lineal asociado; entonces para el sistema no lineal, por el Teorema 8.6 y por el Teorema 8.7, $(0, -1)$ es un punto de silla inestable.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Ejemplo 12.(Dos especies en competencia). Supongamos que dos especies liebres y ovejas compiten por el mismo tipo de alimento (grama) y esta cantidad de alimento es limitada, ignorando otros factores como depredadores, factores climáticos, otras fuentes de alimento. Las E.D. que modelan este fenómeno son las ecuaciones de Lotka-Volterra

$$x' = x(3 - x - 2y) = F(x, y)$$

$$y' = y(2 - x - y) = G(x, y)$$

donde $x(t) =$ la población de liebres y $y(t) =$ la población de ovejas. Hallar los puntos críticos, definir qué tipo de puntos críticos son y su estabilidad.

Solución: Los puntos críticos son: $A(0,0)$, $B(0,2)$, $C(3,0)$, $D(1,1)$.

El Jacobiano es

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2x - 2y & -2y \\ -y & 2 - x - 2y \end{bmatrix}$$

1. Para el punto $A(0,0)$, $J = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y sus valores propios son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, luego $(0,0)$ es un nodo inestable, es decir, las trayectorias salen tangencialmente del origen paralelas al vector propio $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_2 = 2$

2. Para el punto $B(0,2)$, $J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, luego $B(0,2)$ es un nodo asintóticamente estable, las trayectorias entran al punto crítico en la dirección del vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1 = -1$.

3. Para el punto $C(3,0)$, $J = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$, luego $C(3,0)$ es un nodo asintóticamente estable, las trayectorias entran al punto crítico en la dirección del vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1 = -1$.

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

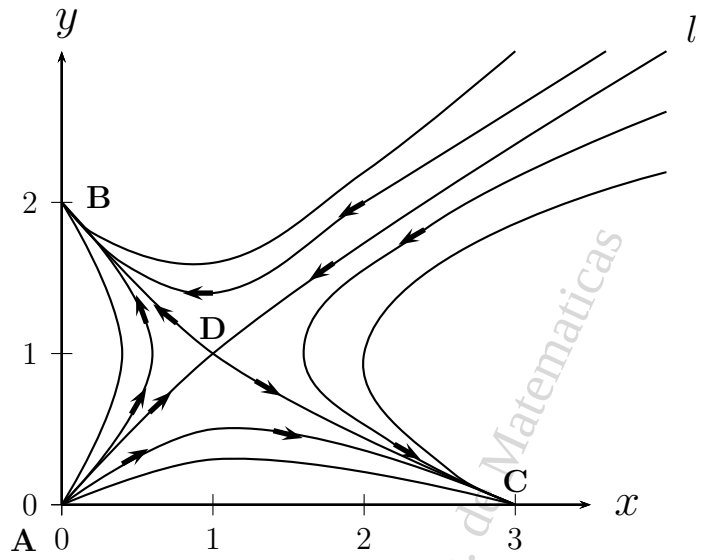


Figura 8.23

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

4. Para el punto $D(1,1)$, $J = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ y sus valores propios son $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, luego $D(1,1)$ es un punto de silla y como $p = -(a_1 + b_2) = -(-1-1) = 2$ y $\det A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -1 < 0$ entonces $D(1,1)$ es inestable.

El retrato de fase mostrado en la figura 8.23 tiene la siguiente interpretación biológica: una de las dos especies inevitablemente se extingue, por ejemplo, por debajo de la curva l las trayectorias tienden al punto crítico $C(3,0)$ lo cual quiere decir que las ovejas se extinguen; cuando las trayectorias están por encima de la curva l las trayectorias tienden al punto crítico $B(0,2)$ lo cual quiere decir que se extinguen las liebres.

Ejemplo 13.(Dos especies: un depredador y una presa). Sea $x(t)$ el número de presas (por ejemplo liebres) y $y(t)$ el número de depredadores (por ejemplo lobos). A principios del siglo XX el matemático italiano Vito Volterra modeló este problema, haciendo las siguientes consideraciones:

- En ausencia de depredadores, la población de presas crece a la tasa natural $\frac{dx}{dt} = ax$, con $a > 0$.

- En ausencia de presas, la población depredadora decrece a la tasa natural $\frac{dy}{dt} = -cx$, con $c > 0$.
- Cuando las presas y los depredadores cohabitan el mismo lugar, las tasas naturales de crecimiento y decrecimiento de presas y depredadores respectivamente son proporcionales al número de encuentros de ambos, es decir, son proporcionales a xy. En consecuencia, el efecto de que los depredadores devoren presas, produce una tasa decreciente de interacción $-bxy$ (b constante positiva) con respecto a la población de presas x y una tasa creciente dxy (d constante positiva) con respecto a la población de depredadores.

En consecuencia, sumando las tasas naturales y las tasas de interacción, tenemos las ecuaciones para una especie depredadora y una especie presa:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy = x(a - by)\\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy = y(-c + dx)\end{aligned}$$

haciendo la consideración adicional de que en ausencia de depredadores el crecimiento de las presas es logístico, es decir, es directamente proporcional a su población como también a la diferencia con su población máxima y tomando $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$, tenemos el siguiente sistema de E.D. de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - xy + \epsilon x(1 - x)\\ \frac{dy}{dt} &= -y + xy\end{aligned}$$

Analizar la estabilidad de la E.D. variando el parámetro ϵ para $\epsilon \geq 0$.
Sus puntos críticos son $(0, 0), (1, 1)$
El Jacobiano es

$$J(F(x, y), G(x, y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - y + \varepsilon(1 - 2x) & -x \\ y & -1 + x \end{bmatrix}$$

Para $\epsilon = 0$ tenemos (ver Figura 8.24):

1. Para el punto crítico $(0, 0)$, $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y sus valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, luego $(0, 0)$ es un punto de silla inestable.

Universidad de Antioquia Depto. de Matemáticas

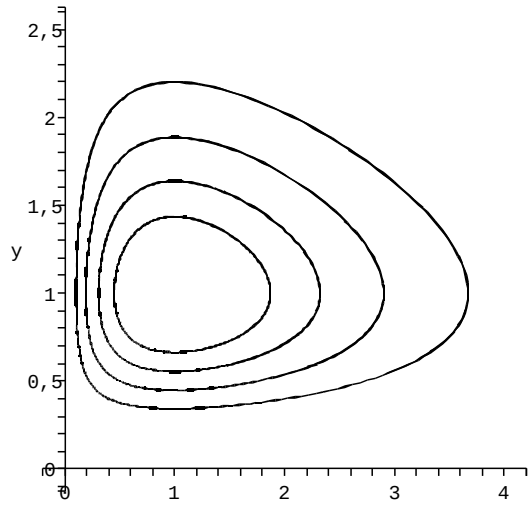


Figura 8.24 Sistema depredador-presa, $\epsilon = 0$

2. Para el punto crítico $(1,1)$, $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y sus valores propios son $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, luego $(1,1)$ es un centro estable, las trayectorias giran alrededor del punto crítico.

Para $0 < \epsilon < 2$ tenemos (ver Figura 8.25):

1. Para el punto $(0,0)$, $J = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y sus valores propios son $\lambda_1 = \epsilon + 1 > 0$, $\lambda_2 = -1$, luego $(0,0)$ es un punto de silla inestable.

2. Para el punto $(1,1)$, $J = \begin{bmatrix} -\varepsilon & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y sus valores propios son $\lambda_{1,2} = \frac{-\epsilon \pm \sqrt{4-\varepsilon^2}\, i}{2}$ (o sea que ambas raíces son negativas), luego $(1,1)$ es un foco asintóticamente estable.

Para $\epsilon = 2$ tenemos (ver Figura 8.26))

1. Para el punto $(0,0)$, $J = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, luego $(0,0)$ es un punto de silla inestable.

2. Para el punto $(1,1)$, $J = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y sus valores propios son $\lambda_{1,2} = -1$, luego $(1,1)$ es un nodo o un foco asintóticamente estable.

Universidad de Antioquia, Depto. Matematicas

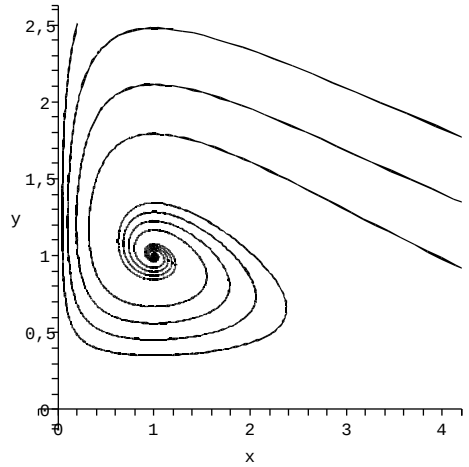


Figura 8.25 Sistema depredador-presa, $0 < \epsilon < 2$

Depto. de Matematicas

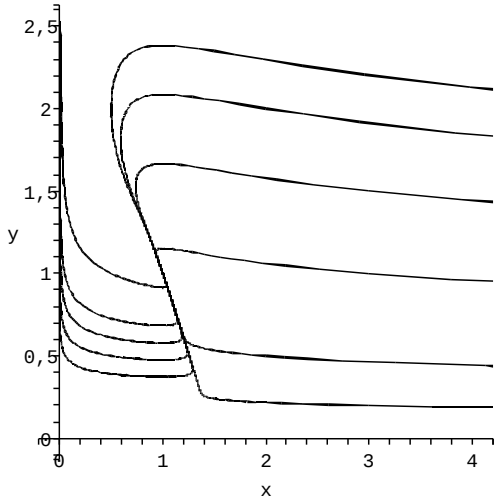


Figura 8.26 Sistema depredador-presa, $\epsilon = 2$

Para $\epsilon > 2$ tenemos (ver Figura 8.27):

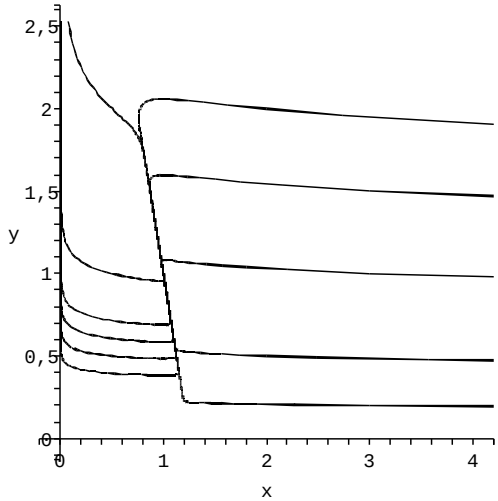


Figura 8.27 Sistema depredador-presa, $\epsilon > 2$

Universidad de Antioquia, Depto. Matematicas

1. Para el punto $(0,0)$, $J = \begin{bmatrix} 1+\epsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y sus valores propios son $\lambda_1 = \epsilon + 1$, $\lambda_2 = -1$, luego $(0,0)$ es un punto de silla inestable.

2. Para el punto $(1,1)$, $J = \begin{bmatrix} -\epsilon & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y sus valores propios son $\lambda_{1,2} = \frac{-\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2} < 0$, luego $(1,1)$ es un nodo asintóticamente estable.

Obsérvese que para $\epsilon = 0$ las soluciones son estructuralmente (son estables y periódicas) distintas de las soluciones para $\epsilon > 0$ (asintóticamente estables y no periódicas), por este cambio estructural en las soluciones, decimos que en $\epsilon = 0$ se produce una bifurcación.

En los siguientes ejercicios, bosqueje las trayectorias típicas e indique la dirección del movimiento cuando t aumenta e identifique el punto crítico como un nodo, un punto de silla, un centro o un punto espiral y la estabilidad.

Ejercicio 1. $\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x^2 - y$
(**Rta:** el orígen es un punto silla inestable. El punto $(1,1)$ es un centro o un punto espiral, pero su estabilidad no es determinada por el teorema de esta

sección, utilizar el criterio de Liapunov.)

Ejercicio 2. $\frac{dx}{dt} = y - 1, \quad \frac{dy}{dt} = x^2 - y$
(**Rta:** hay un punto silla inestable en $(1, 1)$ y un punto espiral asintóticamente estable en $(-1, 1)$.)

Ejercicio 3. $\frac{dx}{dt} = y^2 - 1, \quad \frac{dy}{dt} = x^3 - y$
(**Rta:** hay un punto silla inestable en $(1, 1)$ y un punto espiral asintóticamente estable en $(-1, -1)$.)

Ejercicio: 4. $\frac{dx}{dt} = xy - 2, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y$
(**Rta:** hay un punto silla inestable en $(2, 1)$ y un punto espiral asintóticamente estable en $(-2, -1)$.)

Ejercicio: 5. $\frac{dx}{dt} = -x + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -2y$
(**Rta:** $(0, 0)$ es un nodo asintóticamente estable, $(\pm 1, 0)$ son puntos de silla inestables.)

Ejercicio: 6. $\frac{dx}{dt} = y^3 - 4x, \quad \frac{dy}{dt} = y^3 - y - 3x$
(**Rta:** $(0, 0)$ es un nodo asintóticamente estable, $(-2, -2), (2, 2)$ son puntos de silla inestables.)

Ejercicio: 7.

a). Convertir la ecuación

$$x'' + ax' + bx + x^2 = 0, \qquad a, b > 0, \quad a^2 < 4b$$

en un sistema.

b). Mostrar que el origen es un foco asintóticamente estable y el punto $(-b, 0)$ es un punto de silla.

c). Bosquejar las trayectorias alrededor de los dos puntos críticos.

Ejercicio: 8. Considere el siguiente caso particular de las ecuaciones de Lotka-Volterra

$$x' = x(-1 - 2x + y)$$
$$y' = y(-1 + 7x - 2y)$$

donde $x, y > 0$ y representan la cantidad de organismos en una población.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

a). Mostrar que tiene cuatro puntos críticos y hacer una interpretación biológica de estos puntos, en el sentido de existencia, sobrevivencia o extinción de las dos especies de organismos.

b). Mostrar que si ambas poblaciones son inicialmente pequeñas, entonces ambas poblaciones se extinguirán.

c). Mostrar que un punto crítico con significado biológico es un punto de silla, el cual indica que poblaciones mayores pueden sobrevivir sin amenaza de extinción.

Ejercicio: 9. (En este ejemplo vemos que los términos no lineales trasforman un nodo estrella en una espiral) Consideremos el sistema

$$r' = -r, \qquad \theta' = \frac{1}{\ln r}$$

a. Encontrar r y θ explicitamente, con la condición incial (r_0, θ_0)

b. Mostrar que $r(t) \to 0$ y $\theta(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Esto muestra que el origen es un foco asintóticamente estable del sistema no lineal dado.

c. Escriba la E.D. en el sistema de coordenadas x, y.

d. Muestre que el sistema lineal asociado cerca al origen es:

$$x' = -x, \qquad y' = -y.$$

Esto muestra que el origen es un nodo estrella.

Universidad de Antioquia. Depto. de Matemáticas

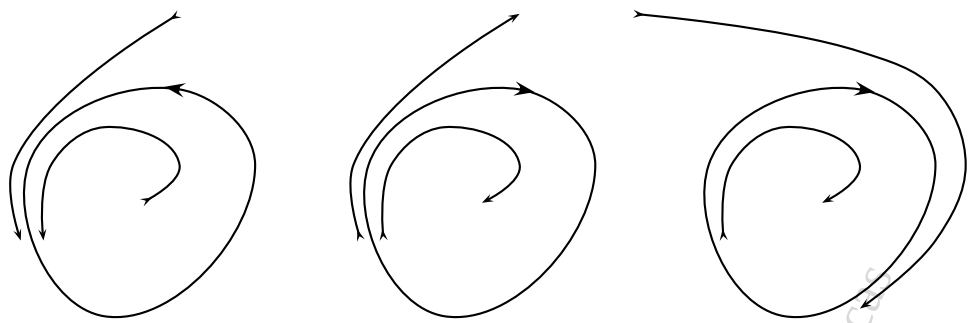
8.6. CICLOS LIMITES: TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON

Consideremos el sistema autónomo no lineal

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y); \quad \frac{dy}{dt} = G(x,y) \tag{8.53}$$

donde F, G así como sus primeras derivadas parciales son continuas en el plano de fase.
Estamos interesados en propiedades globales, es decir, el comportamiento de las trayectorias en grandes regiones del plano de fase. El problema central de una teoría global es determinar si el sistema anterior tiene o no trayectorias cerradas.
Una trayectoria $\Gamma(x(t),\ y(t))$ de (8.53) se llama periódica si ninguna de estas dos funciones es constante, están definidas para todo t y existe un número $T > 0$ tal que $x(t+T) = x(t)$ y $y(t+T) = y(t)$ para todo t. El T más pequeño con esta propiedad se conoce como período de la solución. Es claro que cada solución periódica define una trayectoria cerrada en el plano de fase, que es recorrida en forma completa (en sentido horario o anti-horario) cuando t crece de t_0 a $t_0 + T$, para todo t_0. Recíprocamente, si $\Gamma(x(t), y(t))$ es una trayectoria cerrada, entonces $x(t)$, $y(t)$ son periódicas.
Se sabe que un sistema lineal tiene trayectorias cerradas si y solo si las raíces de la ecuación auxiliar son imaginarias puras (ver sección 8.3). Así, para un sistema lineal **todas** las trayectorias son cerradas o ninguna lo es. En los sistemas no lineales puede existir al menos una trayectoria cerrada que sea aislada, es decir cualquier trayectoria vecina a ella no es cerrada (son trayectorias espirales que salen o entran a esta trayectoria cerrada) esta trayectoria cerrada aislada la llamaremos ciclo límite.. Cuando las trayectorias espirales se acercan al ciclo límite tanto por dentro como por fuera, entonces decimos que el ciclo límite es estable; si las trayectorias espirales se alejan del ciclo límite, decimos que el ciclo límite es inestable; cuando las trayectorias espirales que estan por fuera se acercan (o se alejan) y las que estan por dentro se alejan (o se acercan), entonces decimos que el ciclo límite es seudo-estable (Ver figura 8.28). También puede suceder que una misma E.D. tenga varios ciclos límites aislados unos de otros.

Universidad de Antioquia - Depto. de Matemáticas



Ciclo Límite estable Ciclo Límite inestable Ciclo Límite seudoestable

Figura 8.28

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejemplo 11. Consideremos el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \tag{8.54}$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2) \tag{8.55}$$

Sabemos que en coordenadas polares: $x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, como $x^2 + y^2 = r^2$ y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, derivando:

$$x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt} = r\,\frac{dr}{dt}, \quad x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt} = r^2\,\frac{d\theta}{dt}$$

Multiplicando (8.54) por x y (8.55) por y y sumamos:

$$r\,\frac{dr}{dt} = r^2(1 - r^2) \tag{8.56}$$

Si multiplicamos (8.55) por x y (8.54) por y y restamos:

$$r^2\,\frac{d\theta}{dt} = r^2 \tag{8.57}$$

El sistema (8.56) y (8.57) tiene un punto crítico en $r = 0$; como estamos interesados en hallar las trayectorias, podemos suponer $r > 0$, luego:

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1$$

Resolviéndolas por separado, se obtiene la solución general

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}; \quad \theta = t + t_0$$

Luego la solución general de (8.54) y (8.55) es :

$$x = \frac{\cos(t + t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}} \quad y = \frac{\operatorname{sen}(t + t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}$$

Interpretación geométrica:
Si $C = 0 \Rightarrow r = 1,\ \theta = t + t_0$ que es la trayectoria circular $x^2 + y^2 = 1$ en sentido anti-horario.
Si $C < 0 \Rightarrow r > 1$ y $r \to 1$ cuando $t \to \infty$.
Y si $C > 0 \Rightarrow r < 1$ y $r \to 1$ cuando $t \to \infty$.

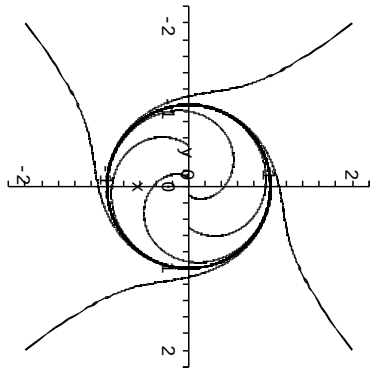


Figura 8.28 Ciclo Límite

Es decir, existe una trayectoria cerrada $r = 1$ a la que todas las trayectorias tienden en forma de espiral por dentro o por fuera cuando $t \to \infty$ (ver gráfica 8.28), este ciclo límite es estable, porqué?.
Los siguientes criterios garantizan la no existencia de ciclos límites, también los llaman criterios negativos de existencia de trayectorias cerradas.

Definición 8.7. Si un sistema puede ser escrito como $\overrightarrow{x}' = -\nabla V(\overrightarrow{x})$ para alguna función $V(\overrightarrow{x})$, real valuada y continuamente diferenciable. Al sistema se le llama sistema gradiente con función potencial $V(\overrightarrow{x})$, donde $\overrightarrow{x}(t) \in \mathbb{R}^n$.

Dpto. de Matematicas
Univers.

Teorema 8.8.

Los sistemas gradientes no tienen ciclos límites .

Demostración. Supongamos que tiene un ciclo límite. Consideremos los cambios en V en un giro, como $\overrightarrow{x}(t+T) = \overrightarrow{x}(t)$, donde T es el periodo, entonces $\triangle V(\overrightarrow{x}) = V(\overrightarrow{x}(t+T)) - V(\overrightarrow{x}(t)) = 0$. Por otro lado

$$\triangle V = \int_0^T \frac{dV}{dt}\,dt = \int_0^T (\nabla V \cdot \overrightarrow{x}')\,dt = \int_0^T (-\overrightarrow{x}' \cdot \overrightarrow{x}')\,dt = -\int_0^T \|\overrightarrow{x}'\|^2\,dt < 0$$

ya que $\overrightarrow{x}' \equiv 0$ corresponde a un punto crítico y un punto crítico no es una trayectoria cerrada. Esta contradicción nos obliga a afirmar que no hay ciclos límites. ■

Ejemplo. Mostrar que el siguiente sistema no tiene ciclos límites:

$$x' = \operatorname{sen} y, \quad y' = x\cos y$$

Sea $V(x,y) = -x\operatorname{sen} y$ entonces $-\frac{\partial V}{\partial x} = x'$ y $-\frac{\partial V}{\partial y} = y'$, por lo tanto el sistema es conservativo y según el teorema no hay ciclos límites para éste sistema en todo $\mathbb{R}^2$.

Se puede utilizar las funciones de Liapunov para demostrar que un sistema no tiene cíclos límites, hagamóslo con un ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial del oscilador amortiguado no lineal

$$x'' + (x')^3 + x = 0$$

y supongamos que tiene un cíclo límite o sea que tiene una solución $x(t)$ periódica, con período T y consideremos su función de energía

$$V(x,x') = \frac{1}{2}(x^2 + (x')^2).$$

Después de un ciclo x y x' retornan a sus valores iniciales y por lo tanto, para todo el ciclo $\triangle V = 0$.
Por otro lado, $\triangle V = \int_0^T V'\,dt$ y como

$$V' = x'(x + x'') = x'(-x'^3) = -(x')^4 \leq 0$$

entonces $\triangle V = -\int_0^T (x')^4\,dt \leq 0$, el igual se produce cuando $x' \equiv 0$ o sea cuando x es un punto crítico, lo cual contradice que $x(t)$ es un cíclo límite, por lo tanto $\triangle V < 0$ y esto es absurdo, ya que $\triangle V = 0$, luego no hay cíclos límites.

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matemáticas

Teorema 8.9.

Una trayectoria cerrada del sistema (8.53) rodea necesariamente al menos un punto crítico de este sistema.

Es decir, un sistema sin puntos críticos en cierta región no puede tener en ella, trayectorias cerradas.

Un tercer criterio para descartar ciclos límites, esta basado en el Teorema de Green y se le llama criterio de Dulac.

Teorema 8.10 (Criterio de Dulac).

Sea $\overrightarrow{x}' = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ un campo vectorial, continuamente diferenciable en una región R simplemente conexa del plano. Si existe una función continuamente diferenciable y real valuada $g(\overrightarrow{x})$ definida en R tal que $\nabla \cdot (g(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x}')$ mantiene el mismo signo en R, entonces no hay ciclos límites dentro de la región R del plano .

Demostración. Supongamos que existe una órbita cerrada Γ contenida en la región R. Sea A la región interior a Γ. Por el teorema de Green se tiene

$$\int\int_A \nabla \cdot (g(\overrightarrow{x})\overrightarrow{f})\, dA = \oint_\Gamma (g(\overrightarrow{x})\overrightarrow{f}) \cdot \overrightarrow{n}\, ds$$

donde $\overrightarrow{n}$ es el vector normal a Γ en dirección hacia el exterior de A y ds es el elemento de longitud de arco a lo largo de Γ, la doble integral del lado izquierdo debe ser distinta de cero, ya que por hipotesis, $\nabla \cdot (g(\overrightarrow{x})\overrightarrow{f}))$ tiene el mismo signo en R. La integral de línea, en el lado derecho es igual a cero, ya que $\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{x}' \cdot \overrightarrow{n} = 0$ (el vector tangente $\overrightarrow{x}'$ y el vector normal $\overrightarrow{n}$ son ortogonales). Esta contradicción implica que no hay órbitas cerradas en R. ■

Algunas funciones $g(x, y)$ que ayudan son 1, $\frac{1}{x^a y^b}$, e^{ax}, e^{ay}.

Ejemplo. Dado el sistema $x' = x(2 - x - y)$, $y' = y(4x - x^2 - 3)$, mostrar que no tiene cíclos límites en el primer cuadrante: $x > 0$, $y > 0$.

Solución. Tomando $g(x, y) = \frac{1}{xy}$, calculemos $\nabla \cdot (g(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x}')$

$$\nabla\cdot(g(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x}') = \nabla\cdot\frac{1}{xy}\begin{bmatrix} x(2-x-y) \\ y(4x-x^2-3)\end{bmatrix} = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j})\cdot\begin{bmatrix} \frac{2-x-y}{y} \\ \frac{4x-x^2-3}{x}\end{bmatrix} = -\frac{1}{y} < 0$$

en el primer cuadrante.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejemplo. Dado el sistema $x' = y$, $y' = -x - y + x^2 + x^2$, mostrar que no tiene cíclos límites.
Solución. Tomando $g(x, y) = e^{-2x}$, calculemos $\nabla \cdot (g(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x}')$

$$\nabla\cdot(g(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x}') = \nabla\cdot\frac{1}{xy}\begin{bmatrix} x(2-x-y) \\ y(4x-x^2-3)\end{bmatrix} = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j})\cdot\begin{bmatrix} \frac{2-x-y}{y} \\ \frac{4x-x^2-3}{x}\end{bmatrix} = -\frac{1}{y} < 0$$

en el primer cuadrante.
En particular, cuando $g(x, y) = 1$ se obtiene el siguiente corolario, debido a Bendixson.

Corolario 8.1.

Si $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$, es siempre positiva o siempre negativa en una región del plano de fase, entonces el sistema (8.53) no tiene trayectorias cerradas en esa región.

Demostración: como

$$\overrightarrow{x}' = (x'(t), y'(t)) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = (F(x, y), G(x, y)),$$

tomemos $g(\overrightarrow{x}) = 1$, entonces

$$\nabla \cdot (g(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x}') = \nabla \cdot \overrightarrow{x}' = \nabla \cdot \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \nabla \cdot (F(x, y), G(x, y)) =$$

$$= (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}) \cdot (F(x, y), G(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$$

■

A continuación enunciaremos un teorema que da las condiciones suficientes para la existencia de trayectorias cerradas de (8.53); es el llamado teorema de **Poincaré-Bendixson**, ver su demostración en el texto Ecuaciones Diferenciales, sistemas dinámicos y algebra lineal de Hirsch and Smale.

Teorema 8.11 (Teorema de Poincaré-Bendixson).

Sea R una región acotada en el plano de fase con su frontera y supongamos que R no contiene puntos críticos del sistema (8.53).
Si $\Gamma(x(t), y(t))$ es una trayectoria de (8.53) que está en R para un cierto t_0 y permanece en R para todo $t \geq t_0$, entonces Γ o es una trayectoria cerrada o tiende en forma espiral hacia una trayectoria cerrada cuando $t \to \infty$. Así pues, en cualquier caso, el sistema (8.53) tiene en R una trayectoria cerrada.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

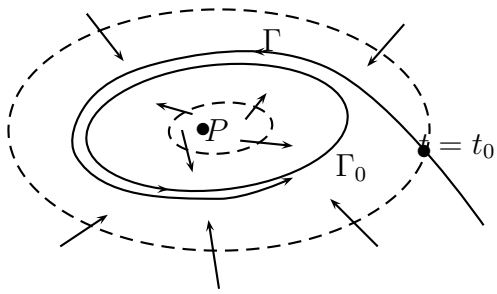


Figura 8.29

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

En la figura 8.29, R es la región formada por las dos curvas de trazo discontinuo junto con la región anular entre ellas.
Supongamos que el vector $\vec{V}(x,y) = F(x,y)\vec{i} + G(x,y)\vec{j}$ apunta hacia R en todo punto del contorno, entonces toda trayectoria Γ que pase por un punto del contorno (en $t = t_0$), debe entrar a R y no podrá salir de R y bajo estas consideraciones el Teorema de Poincaré-Bendixson asegura que Γ ha de tender en espiral hacia una trayectoria cerrada Γ_0.

El sistema (8.54) y (8.55) tiene a $(0,0)$ como punto crítico y la región R limitada por los círculos $r = \frac{1}{2}$ y $r = 2$ no contiene puntos críticos.
Se vió que $\frac{dr}{dt} = r(1-r^2)$ para $r > 0$.
Luego $\frac{dr}{dt} > 0$ sobre el círculo interior y $\frac{dr}{dt} < 0$ sobre el círculo exterior, así que $\vec{V}$ apunta hacia R en todos los puntos de frontera. Luego toda trayectoria que pase por un punto de frontera entrará en R y permanecerá en R para $t \to \infty$. Por el **Teorema de Poincaré-Bendixson**, R contiene una trayectoria cerrada Γ_0 que por otro razonamiento era el círculo $r = 1$.
En 1928 el físico Francés Alfred Liénard estudió la E.D.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \tag{8.58}$$

la cual generalizaba la E.D. de Van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2-1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

de la teoría de los tubos de vacío. El criterio sirve para determina la existencia de un único ciclo límite para la **Ecuación de Liénard**

Haciendo $x' = y$ obtenemos el siguiente sistema equivalente, llamado

sistema de Liénard,

$$\frac{dx}{dt} = y \tag{8.59}$$

$$\frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)\,y \tag{8.60}$$

Una trayectoria cerrada de (8.58), equivale a una solución periódica de (8.59) y (8.60). La demostración del teorema de Liénard la haremos en el Apéndice D.

Teorema 8.12 (**Teorema de Liénard).**

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que:

i. Ambas son continuas así como sus derivadas en todo x.

ii. $g(x)$ es impar y tal que $g(x) > 0$ para $x > 0$ y $f(x)$ es par.

iii. $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$, (la cual es impar), tiene exactamente un cero positivo en $x = a$; es negativa para $0 < x < a$; es positiva y no decreciente para $x > a$ y $F(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$,

entonces la ecuación (8.58) tiene una única trayectoria cerrada que rodea al orígen en el plano de fase y a ella tienden en forma de espiral todas las demás trayectorias cuando $t \to \infty$.

Desde el punto de vista físico (8.58) representa la ecuación del movimiento de una masa unidad sujeta a un muelle y sometida a una fuerza restauradora $-g(x)$ y una fuerza de amortiguamiento $-f(x)\,\frac{dx}{dt}$.

La hipótesis sobre $g(x)$ tiende a disminuir la magnitud del desplazamiento. La hipótesis sobre $f(x)$ que es negativa para pequeños $|x|$ y positiva para grandes $|x|$, significa que el movimiento se intensifica para pequeños $|x|$ y se retarda para grandes $|x|$, tendiendo por tanto a permanecer en oscilación estacionaria. Si la $f(x)$ es de esta forma, se dice que el sistema físico absorbe energía cuando $|x|$ es pequeño y la disipa cuando $|x|$ es grande.

Ejemplo 12. Ecuación de Van der Pol, la cual aparece en la teoría de válvulas de vacío.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\,\frac{dx}{dt} + x = 0$$

Universidad de Antioquia Depto. de Matemáticas

donde $\mu > 0$,

$$f(x) = \mu(x^2 - 1), \quad g(x) = x$$

Para esta f y g se satisface i. y ii.

Para iii.

$$F(x) = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right) = \frac{1}{3}\,\mu x(x^2 - 3)$$

su único cero positivo es $x = \sqrt{3}$.
$F(x) < 0$ para $0 < x < \sqrt{3}$.
$F(x) > 0$ para $x > \sqrt{3}$.
$F(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$.
Como $F'(x) = \mu(x^2 - 1) > 0$ para $x > 1 \Rightarrow F(x)$ es no decreciente para $x > \sqrt{3}$. Luego se cumplen las hipótesis del **Teorema de Liénard** y por lo tanto tiene una única trayectoria cerrada (ciclo límite), a la que tienden en forma de espiral (asintóticamente) todas las demás trayectorias (soluciones no triviales).

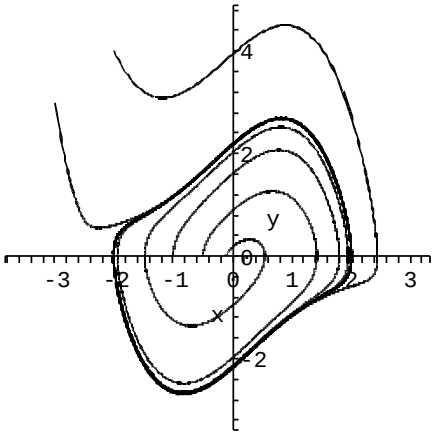


Figura 8.30 Cíclo Límite para la E. de Van Der Pol, $\mu = 1$

Ejercicio 1. Considere el sistema

$$x' = x - y - x(x^2 + 5y^2), \qquad y' = x + y - y(x^2 + y^2)$$

a. Clasificar el punto crítico en el origen.

b. Escriba el sistema en coordenadas polares, usando

$$rr' = xx' + yy' \quad \text{y} \quad \theta' = \frac{xy' - yx'}{r^2}.$$

Univ. de Matematicas

c. Determinar la circunferencia de radio máximo r_1, centrado en el origen, tal que todas las trayectorias tengan su componente radial dirijida hacia el exterior de la circunferencia.

d. Determinar la circunferencia de radio mínimo r_2, centrado en el origen, tal que todas las trayectorias tengan su componente radial dirijida hacia el interior de la circunferencia.

e. Probar que el sistema tiene un ciclo límite estable en la región $r_1 \leq r \leq r_2$.

Ejercicio 2. Considere el sistema

$$x' = 4x + 4y - x(x^2 + y^2), \qquad y' = -4x + 4y - y(x^2 + y^2)$$

a. Escriba el sistema en coordenadas polares.

b. Aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson para demostrar que existe una trayectoria cerrada entre las circunferencias $r = 1$ y $r = 3$ y determinar si este ciclo límite es estable inestable o seudoestable.

c. Hallar la solución general no constante $x(t), y(t)$ del sistema original y usarla para hallar una solución periódica correspondiente a la trayectoria cerrada cuya existencia se mostró en b).

d. Dibujar la trayectoria cerrada y al menos dos trayectorias más en el plano de fase.

Ejercicio 3. Mostrar que el sistema

$$x' = 3x - y - xe^{(x^2+y^2)}, \quad y' = x - 3y - ye^{(x^2+y^2)}$$

tiene un ciclo límite, determinar el tipo de estabilidad de de este ciclo límite.

Ejercicio 4. Mostrar que el sistema

$$x' = x - y - x^3, \quad y' = x + y - y^3$$

tiene un ciclo límite, determinar el tipo de estabilidad de de este ciclo límite.

Ejercicio 5. Mostrar que el siguiente sistema tiene al menos un ciclo límite

$$x' = -x - y + x(x^2 + 2y^2), \quad y' = x - y + y(x^2 + 2y^2)$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejercicio 6. Considere la ecuación del oscilador $x'' + F(x, x')x' + x = 0$, donde $F(x, x') < 0$ si $r \leq a$ y $F(x, x') > 0$ si $r \geq b$, donde $r^2 = x^2 + (x')^2$.
a) De una interpretación física sobre el supuesto sobre F.
b) Mostrar que hay al menos un ciclo límite en la región $a < r < b$.

Ejercicio 7. Construyendo una función de Liapunov, mostrar que el sistema $x' = -x + 4y, \quad y' = -x - 3y^3$ no tiene cíclos límites. (Ayuda: utilice $V(x, y) = x^2 + ay^2$ y escoja un a apropiado.)

Ejercicio 8. Utilizando el criterio de Dulac, mostrar que el sistema

$$x' = x(2 - x - y), \quad y' = y(4x - x^2 - 3)$$

no tiene órbitas cerradas para todo $x > 0$ y $y > 0$. (Ayuda: utilice $g(x, y) = \frac{1}{xy}$).

Ejercicio 9. Utilizando el criterio de Dulac, mostrar que el sistema

$$x' = y, \quad y' = -x - y + x^2 + y^2$$

no tiene órbitas cerradas en todo el plano. (Ayuda: utilice $g(x, y) = e^{-2x}$).

Ejercicio 10. Usando los teoremas de esta sección, determinar si las siguientes ecuaciones tinene ciclos límites:
a) $\frac{d^2x}{dt^2} + (5x^4 - 9x^2)\frac{dx}{dt} + x^5 = 0$, b) $\frac{d^2x}{dt^2} - (x^2 + 1)\frac{dx}{dt} + x^5 = 0$,
c) $\frac{d^2x}{dt^2} - (\frac{dx}{dt})^2 - (1 + x^2) = 0$, d) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + (\frac{dx}{dt})^5 - 3x^3 = 0$,
e) $\frac{d^2x}{dt^2} + x^6\frac{dx}{dt} - x^2\frac{dx}{dt} + x = 0$
(**Rta.:** a) Tiene un ciclo límite (Teorema de Liénard), b) No tiene ciclo límite (Corolario 8.1), c) No tiene ciclo límite (Teorema 8.9), d) No tiene ciclo límite (Corolario 8.1), e) Tiene un ciclo límite (Teorema de Liénard))

Ejercicio 11. Mostrar que cualquier ecuación de la forma

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + cx = 0, \quad (a, b, c \text{ positivos})$$

puede ser transformada en la ecuación de Van der Pol por un cambio en la variable independiente.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Ejercicio 12. Si F satisface las hipótesis del teorema de Liénard. Mostrar que

$$z'' + F(z') + z = 0$$

tiene un único ciclo límite estable. (**Ayuda:** haga $x = z'$ $y = -z$.)

8.7. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Los siguientes ejercicios son para E.D. no linealizables, utilizamos el paquete Maple para inferir mediante el retrato de fase los resultados.

Ejemplo 13. Mostrar que la siguiente E.D. no es linealizable en el punto crítico $(0, 0)$, graficar el campo de direcciones,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2xy \\ \frac{dy}{dt} &= y^2 - x^2 \end{aligned}$$

y las soluciones que pasan por los puntos:
$(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(0{,}5, 1)$, $(-0{,}5, 1)$, $(-0{,}4, 1)$, $(0{,}4, 1)$
Solución:

```
>DEplotwith:C:=[D(x)(t)=2*x(t)*y(t),D(y)(t)=y(t)^2-x(t)^2]; C :=
[D(x)(t) = 2*x(t)*y(t), D(y)(t) = y(t)^2-x(t)^2]
```

$$C := [D(x)(t) = 2x(t)y(t), D(y)(t) = y(t)^2 - x(t)^2]$$

```
>with(DEtools):phaseportrait(C,[x(t),y(t)],t=-20..20,
[[x(0)=1,y(0)=-1],[x(0)=-1,y(0)=1],[x(0)=0.5,y(0)=1],
[x(0)=-0.5,y(0)=1],[x(0)=-0.4,y(0)=1],[x(0)=0.4,y(0)=1]],
x=-3..3,y=-3..3,stepsize=.01,arrows=medium,
linecolor=black,thickness=2,color=black);
```

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

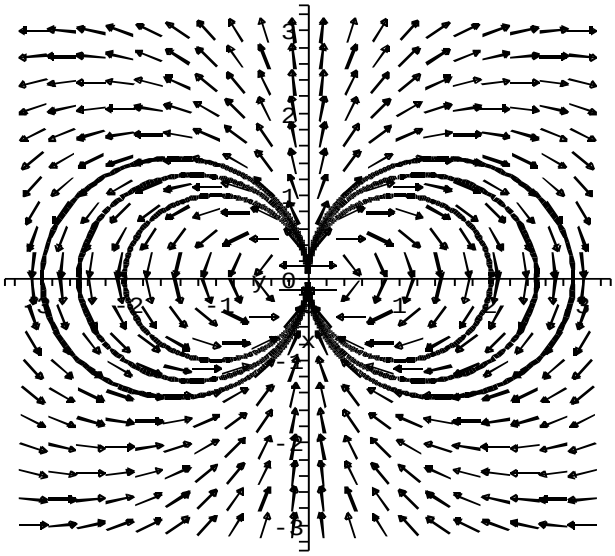


Figura 8.31

como vemos del retrato de fase el punto crítico $(0,0)$ es inestable y no clasificable.

Ejemplo 14. Mostrar que la siguiente E.D. no es linealizable en el punto crítico $(0,0)$, graficar el campo de direcciones,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^3 - 2xy^2 \\ \frac{dy}{dt} &= 2x^2y - y^3 \end{aligned}$$

y las soluciones que pasan por los puntos:
$(1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1),\ (2,1),\ (2,-1),\ (-2,1),\ (-2,-1)$

Solución:

Universidad de Antioquia, L

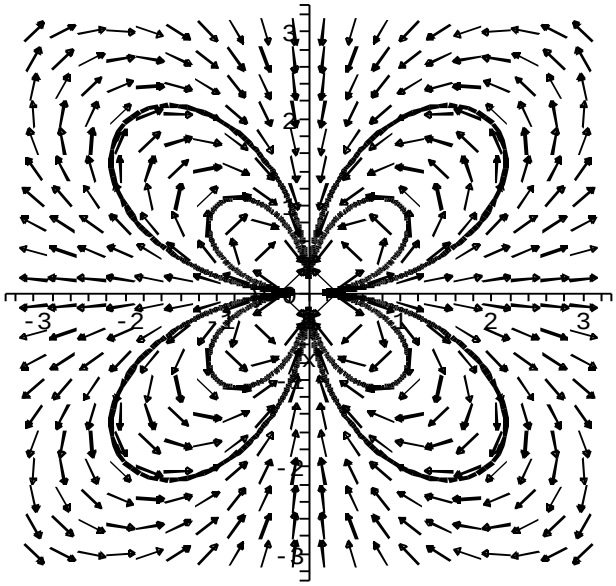


Figura 8.32

```
>with(DEtools):C:=[D(x)(t)=x(t)^3-2*x(t)*y(t)^2,
D(y)(t)=2*x(t)^2*y(t)-y(t)^3];
```

$$C := [D(x)(t) = x(t)^3 - 2x(t)y(t)^2, D(y)(t) = 2x(t)^2y(t) - y(t)^3]$$

```
>with(DEtools):phaseportrait(C,[x(t),y(t)],t=-20..20,[[x(0)=1,y(0)=1],
[x(0)=1,y(0)=-1],[x(0)=-1,y(0)=1],[x(0)=-1,y(0)=-1],[x(0)=2,y(0)=1],
[x(0)=2,y(0)=-1],[x(0)=-2,y(0)=1],[x(0)=-2,y(0)=-1]],x=-3..3,y=-3..3,
stepsize=.01,arrows=medium,linecolor=black,thickness=2,color=black);
```

como vemos del retrato de fase el punto crítico $(0,0)$ es inestable y no clasificable.

Ejemplo 15. Mostrar que la siguiente E.D. no es linealizable en el punto crítico $(0,0)$, pero si es linealizable en los puntos críticos $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ y $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$

Universidad de Antioquia,

y mostrar que estos puntos críticos corresponden a centros y son estables, graficar el campo de direcciones,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - 4y\sqrt{|xy|}\\ \frac{dy}{dt} &= -y + 4x\sqrt{|xy|}\end{aligned}$$

y las soluciones que pasan por los puntos:
$(0{,}2, 0{,}2)$, $(0{,}4, 0{,}4)$, $(-0{,}4, -0{,}4)$, $(-0{,}2, -0{,}2)$, $(-0{,}1, 0{,}1)$, $(0{,}1, -0{,}1)$, $(0{,}2, 0{,}01)$, $(-0{,}2, -0{,}01)$, $(0{,}2, -0{,}2)$, $(-0{,}2, 0{,}2)$.

Solución:

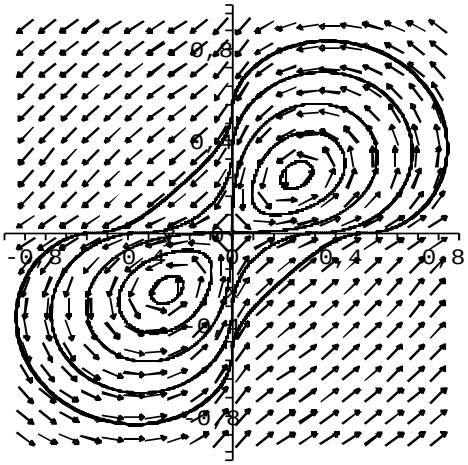


Figura 8.33

```
>with(DEtools):C:=[D(x)(t)=x(t)-4*y(t)*sqrt(abs(x(t)*y(t))),
D(y)(t)=-y(t)+4*x(t)*sqrt(abs(x(t)*y(t)))];
```

$$C := [D(x)(t) = x(t) - 4y(t)\sqrt{|x(t)y(t)|}, D(y)(t) = -y(t) + 4x(t)\sqrt{|x(t)y(t)|}]$$

```
>with(DEtools):phaseportrait(C,[x(t),y(t)],t=-20..20,
[[x(0)=0.2,y(0)=0.2],[x(0)=0.4,y(0)=0.4],
[x(0)=-0.4,y(0)=-0.4],[x(0)=-0.2,y(0)=-0.2],
```

```
[x(0)=-0.1,y(0)=0.1],[x(0)=0.1,y(0)=-0.1],
[x(0)=0.2,y(0)=0.01],[x(0)=-0.2,y(0)=-0.01],
[x(0)=0.2,y(0)=-0.2],[x(0)=-0.2,y(0)=0.2]],
x=-0.8..0.8,y=-0.9..0.9,stepsize=.01,arrows=medium,
linecolor=black,thickness=1,color=black);
```

como vemos del retrato de fase el punto crítico $(0,0)$ es inestable y es un punto de silla, los puntos críticos $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ y $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$ corresponden a centros y son estables.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

APÉNDICE A

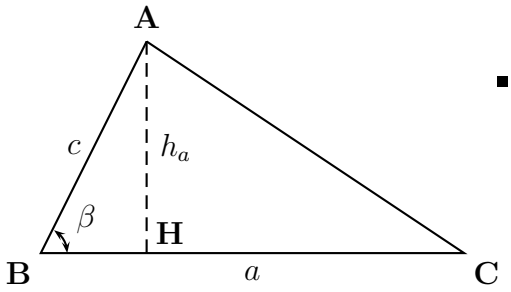
FÓRMULAS

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

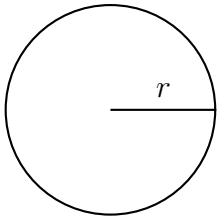
A.1. Fórmulas Aritméticas

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
- $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
- $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
- $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
- Fórmula binomial:
  $(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$
  donde $\binom{n}{k} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$
- Principio de inducción: para demostrar que la afirmación S_n es cierta para todo número natural $n \geq 1$, se siguen los siguientes tres pasos:
  1. Se demuesta que S_n se cumple para $n = 1$
  2. Se toma como hipótesis que S_n se cumple para $n = k$ y luego se demuestra que se cumple para $n = k + 1$
  3. Por el principio de inducción se concluye que S_n se cumple para todo número natural n.

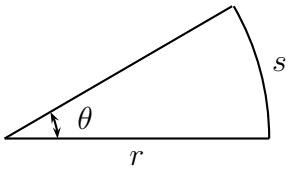
A.2. Fórmulas Geométricas



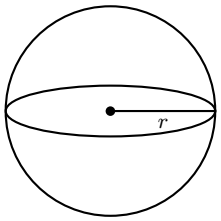
- Area del triángulo:
  $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \operatorname{sen} \beta$.



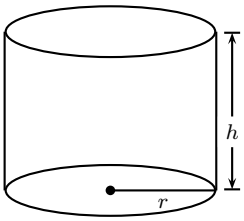
- Area del círculo:
  $A = \pi \cdot r^2$
  Longitud de la circunferencia:
  $C = 2 \cdot \pi \cdot r$



- Area del sector circular:
  $A = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \theta$
  Longitud de arco:
  $s = r \cdot \theta$

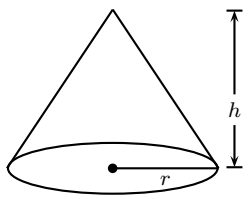


- Volumen de la esfera:
  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
  Area de la esfera:
  $A = 4 \cdot \pi \cdot r \cdot r^2$



- Volumen del cilindro circular:
  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas



- Volumen del cono circular:
  $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

- Coordenadas del punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$, donde $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

- Ecuación de la recta en la forma punto-pendiente, para la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- Ecuación simplificada de la recta con pendiente m y cuya ordenada en el origen es b:

$$y = mx + b$$

- Dos rectas no verticales de pendientes m_1 y m_2 respectivamente son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$

- Dos rectas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente son perpendiculares si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$

- Ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

- Ecuación de la elipse con centro en (h, k) y semi-ejes a y b:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

A.3. Trigonometría

- Medición de ángulos:
  π radianes $= 180^0$, $\quad 1^0 = \frac{\pi}{180}$ rad, $\quad 1$ rad $= \frac{180^o}{\pi}$

- Funciones trigonométricas de ángulos importantes:

θ^0	θ^{rad}	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0^0	0	0	1	0
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$

- Identidades fundamentales:

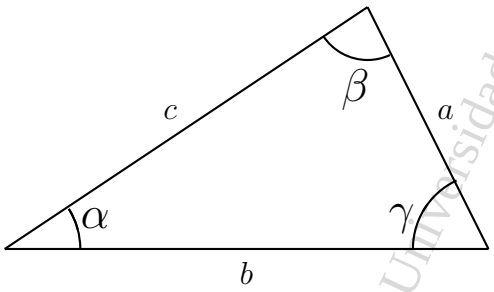
$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, $\quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\quad \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, $\quad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$, $\quad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, $\quad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$, $\quad \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$, $\quad \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$



- Ley de senos: $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$
  Ley de cosenos:
  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

- Fórmulas con sumas y restas de ángulos:
  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
  $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
  $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

- Fórmulas de ángulos dobles
  $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$
  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha$
  $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

- Fórmulas de ángulo mitad
  $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$
  $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

- Fórmulas de productos
  $\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$
  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$
  $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

- Fórmulas de sumas de senos o cosenos
  $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
  $\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
  $\cos \alpha - \cos \beta = 2\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2})\operatorname{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2})$

A.4. Tabla de Integrales

- Formas elementales:

1. Por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$,
2. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, si $n \neq -1$,
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$,
4. $\int e^u\,du = e^u + C$,
5. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln u} + C$,
6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$,
7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$,
8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$,
9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$,
10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$,
11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$,
12. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$,
13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$,
14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$,
15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$,
16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$,
17. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$,
18. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{u+a}{u-a}| + C$,
19. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}|\frac{u}{a}| + C$,

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

- Formas trigonómetricas:

20. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$,
21. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$,
22. $\int \tan^2 u\, du = \tan u - u + C$,
23. $\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u + C$,
24. $\int \operatorname{sen}^3 u\, du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$,
25. $\int \cos^3 u\, du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$,
26. $\int \tan^3 u\, du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$,
27. $\int \cot^3 u\, du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$,
28. $\int \sec^3 u\, du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$,
29. $\int \csc^3 u\, du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$,
30. $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)}$, si $a^2 \neq b^2$,
31. $\int \cos au \cos bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)}$, si $a^2 \neq b^2$,
32. $\int \operatorname{sen} au \cos bu\, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)}$, si $a^2 \neq b^2$,
33. $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$,
34. $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$,
35. $\int \tan^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\, du$, si $n \neq 1$
36. $\int \cot^n u\, du = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\, du$, si $n \neq 1$
37. $\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u \tan u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du$, si $n \neq 1$
38. $\int \csc^n u\, du = -\frac{1}{n-1}\csc^{n-2} u \cot u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du$, si $n \neq 1$
39. $\int u \operatorname{sen} u\ du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$,
40. $\int u \cos u\ du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$,
41. $\int u^n \operatorname{sen} u\ du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u + C$,
42. $\int u^n \cos u\ du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u + C$.

Universidad de Antioquia, Depto de Matematicas

- Formas que contienen $\sqrt{u^2 \pm a^2}$:

43. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\ du = \frac{u}{a}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C,$
44. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\ du = \ln u + \sqrt{u^2 \pm a^2} + C,$
45. $\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u}\ du = \sqrt{u^2+a^2} - a \ln|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}| + C,$
46. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\ du = \sqrt{u^2-a^2} - a \sec^{-1}\frac{u}{a} + C,$
47. $\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\ du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C,$
48. $\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\ du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C,$

- Formas que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$:

49. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\ du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C,$
50. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\ du = \sqrt{a^2-u^2} - a \ln|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}| + C,$
51. $\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\ du = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C,$
52. $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\ du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C,$

- Formas que contienen exponenciales y logaritmos:

53. $\int ue^u\ du = (u-1)e^u + C,$
54. $\int u^n e^u\ du = u^n e^u - n\int u^{n-1}e^u\ du + C,$
55. $\int \ln u\ du = u \ln u - u + C,$
56. $\int u^n \ln u\ du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \ln u - \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + C,$
57. $\int e^{au} \operatorname{sen} bu\ du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bu - b \cos bu) + C,$
58. $\int e^{au} \cos bu\ du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C,$

- Formas trigonométricas inversas:

59. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\ du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C,$
60. $\int \tan^{-1} u\ du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C,$
61. $\int \sec^{-1} u\ du = u \sec^{-1} u - \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + C,$
62. $\int u \operatorname{sen}^{-1} u\ du = \frac{1}{4}(2u^2-1) \operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u}{4}\sqrt{1-u^2} + C,$
63. $\int u \tan^{-1} u\ du = \frac{1}{2}(u^2+1) \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C,$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

64. $\int u \sec^{-1} u \; du = \frac{u^2}{2} \sec^{-1} u - \frac{1}{2}\sqrt{u^2-1} + C$,

65. $\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u \; du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \operatorname{sen}^{-1} u - \frac{1}{n+1} \int \frac{u^{n+1}}{\sqrt{1-u^2}} \; du + C$, si $n \neq -1$

66. $\int u^n \tan^{-1} u \; du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} u - \frac{1}{n+1} \int \frac{u^{n+1}}{1+u^2} \; du + C$, si $n \neq -1$

67. $\int u^n \sec^{-1} u \; du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \sec^{-1} u - \frac{1}{n+1} \int \frac{u^n}{\sqrt{u^2-1}} \; du + C$, si $n \neq -1$

- Otras formas útiles:

68. $\int \sqrt{2au - u^2} \; du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u-a}{a} + C$,

69. $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u-a}{a} + C$,

70. $\int_0^\infty u^n e^{-u} \; du = \Gamma(n+1) = n!, \; (n \geq 0)$,

71. $\int_0^\infty e^{-au^2} \; du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \; (a > 0)$,

72. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n u \; du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \; du =$

$$= \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\frac{\pi}{2}, & \text{si } n \text{ es un número entero par y } n \geq 2, \\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}, & \text{si } n \text{ es un número entero impar y } n \geq 3 \end{cases}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

APÉNDICE B

TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

B.1. PRELIMINARES

a) Si $f(t,x)$ es continua y D es una región acotada y cerrada, definida por

$$D = \{(t,x)/a \leq t \leq b, c \leq x \leq d\} \text{ con } a,b,c,d \in \Re,$$

entonces $f(t,x)$ es acotada $\forall (t,x) \in D$, es decir, existe $M > 0$ tal que $\mid f(t,x) \mid, \ \forall (t,x) \in D$

b) Sea $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y derivable en el intervalo abierto $a < x < b$ entonces, el teorema del valor medio dice que $\exists \xi \in (a,b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a),$$

o también $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

c) Sea $\{x_n(t)\}$ una sucesión de funciones. Entonces se dice que $x_n(t)$ converge uniformemente (c.u.) a una función $x(t)$ en el intervalo $a \leq t \leq b$ si $\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad N > 0$ tal que $\forall n \geq N$ y $\forall t \in [a,b]$ se cumple que $|x_n(t) - x(t)| < \epsilon$

d) Si las funciones del númeral c) son también continuas en $[a, b]$ entonces $x(t)$ también es continua en $[a, b]$. Es decir, "El límite uniforme de funciones continuas también es continua".

e) Sea $f(t, x)$ una función continua en la variable x y supongamos que $\{x_n(t)\}$ converge uniformemente a $x(t)$ cuando $x \to \infty$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(t, x_n(t)) = f(t, x(t))$$

f) Sea $f(t)$ una función integrable en $[a, b]$ entonces

$$|\int_a^b f(t)\ \ dt| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$$

y si $|f(t)| \leq M$ (es decir f es acotada en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b |f(t)|\ \ dt \leq M \int_a^b dt = M(b-a)$$

g) Sea $\{x_n(t)\}$ una sucesión de funciones con $|x_n(t)| \leq M_n\ \ \forall t \in [a, b]$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} |M_n| < \infty$ (es decir, $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge absolutamente) entonces $\{x_n(t)\}$ converge uniformemente en $[a, b]$ a una función $x(t)$. Este teorema se le llama **criterio M de Weierstrass** para la convergencia uniforme de series de funciones.

h) Si $\{x_n(t)\}$ converge uniformemente a $x(t)$ en $[a, b]$ y si $f(t, x)$ es una función continua en la región

$$D = \{(t, x)/a \leq t \leq b,\ c \leq x \leq d\}$$

cerrada y acotada, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(s, x_n(s))\ ds = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f(s, x_n(s))\ ds =$$
$$\int_a^b f(s, \lim_{n\to\infty} x_n(s))\ ds = \int_a^b f(s, x(s) ds$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

B.2. TEOREMA LOCAL DE EXISTENCIA Y UNICIDAD, CASO UNIDIMENSIONAL

A continuación analizaremos las condiciones para la existencia y unicidad del P.V.I. con la E.D. de primer orden:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0 \ \ (1)$$

Teorema B.1.

Sea $f(t,x)$ continua para todos los valores de t y x donde la función esta definida. Entonces el P.V.I. (1) es equivalente a la ecuación integral:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \ \ (2)$$

(es decir, $x(t)$ es solución de (1)$\Longleftrightarrow$ $x(t)$ es solución de (2))

Demostración. $\Rightarrow$): si $x(t)$ satisface (1) entonces:
$\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds = x(s)|_{t_0}^{t} = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0$

$\Leftarrow$): si $x(t)$ satisface (2) entonces derivando (2):
$x'(t) = \frac{d}{dx} \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds = f(t, x(t))$

y $x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s))\, ds = x_0$ ■

Definición B.1 (Función de Lipschitz). *Sea*

$$D = \{(t,x)/a \leq t \leq b, c \leq x \leq d\}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a < b$, $c < d$; decimos que $f(t,x)$ es continua de Lipschitz en x sobre D, si existe una constante k, con $0 < k < \infty$ tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|, \ \ \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D$$

La constante k se le llama constante de Lipschitz.

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Nota:

a) Si $f(t,x)$ es continua de Lipschitz en la variable x entonces $f(t,x)$ es continua en la variable x, para t fijo.

b) Recíprocamente, no toda función continua es continua de Lipschitz.

Ejemplo 1. $f(t,x) = \sqrt{x} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 1$
entonces $f(t,x)$ es continua en D, pero

$$|f(t,x) - f(t,0)| = |\sqrt{x} - 0| = \frac{1}{\sqrt{x}}|x - 0| \quad \forall x \in (0,1)$$

pero $\frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ cuando $x \to 0$ por tanto no hay constante de Lipschitz.

Teorema B.2.

Sean $f(t,x)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ continuas en D entonces $f(t,x)$ es continua de Lipschitz en x sobre D.

Demostración: sean (t,x_1) y $(t,x_2) \in D$. Para t fijo $(\frac{\partial f}{\partial x})(t,x)$ es una función en x, entonces por el Teorema del valor medio

$$\exists \xi \in (x_1,x_2) \text{ tal que } |f(t,x_2) - f(t,x_1)| = |(\frac{\partial f}{\partial x})(t,x)||x_2 - x_1|$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en D, entonces es acotada en D, por lo tanto existe $0 < k < \infty$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \leq k, \quad \forall (t,x) \in D$ ■

Definición B.2 (Iteración de Picard). *Sea $\{x_n(t)\}$ tal que*

$x_0(t) = x_0$

$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))\, ds$

$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\, ds$

$\vdots$

$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds$

a esta sucesión se le llama las iteradas de Picard.

Universidad de Antioquia Depto. de Matematicas

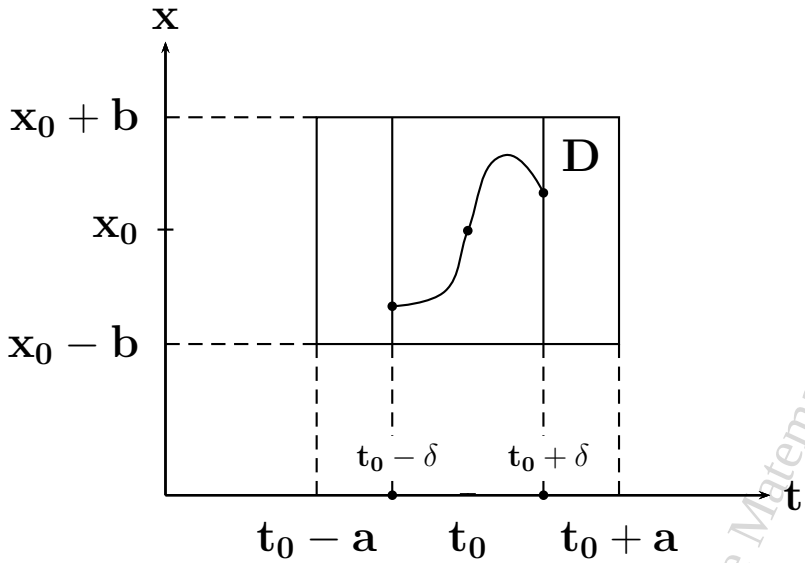


Figura A.1

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Teorema B.3 (Existencia).

Sea $f(t,x)$ continua de Lipschitz en x con constante de Lipschitz k en la región D de todos los puntos (t,x) que satisfacen las desigualdades $|t-t_0| \leq a$, $|x-x_0| \leq b$, entonces existe $\delta > 0$ tal que el P.V.I. $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ tiene solución $x = x(t)$ en el intervalo $|t-t_0| \leq \delta$.

Demostración. (Ver figura A.1). Veamos que las iteradas de Picard convergen uniformemente y dan en el límite la solución a la ecuación integral

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Como f es continua en D, entonces $\exists M > 0$ tal que $\forall (t,x) \in D$: $|f(t,x)| \leq M$
Sea $\delta = min\{a, \frac{b}{M}\}$
Pasos para la demostración:

1. Veamos que las iteradas de Picard $\{x_n(t)\}$ son continuas y satisfacen la desigualdad $|x_n(t) - x_0| \leq b$ (de esto se concluye que $b - x_0 \leq x_n(t) \leq b + x_0$ y por tanto $f(t, x_n(t))$ esta bien definida, ya que $(t, x_n(t)) \in D$)
$x_0(t) = x_0$ (la función constante siempre es continua)

$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_0(s))\, ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_0)\, ds$
Como $f(t, x_0)$ es continua en (t, x_0), entonces la integral también es continua, luego $x_1(t)$ es continua.
Similarmente $x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_1(s))\, ds$ es continua ya que $f(t, x(t))$ es continua y así sucesivamente para $n \geq 3, 4, \ldots$
Para $n = 0$ $|x_0(t) - x_0| = 0 \leq b$
Para $n > 0$:

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x_0| &= |\int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_{n-1}(s))|\, ds \leq M|\int_{t_0}^{t} ds| = M|t - t_0| \leq M\delta \leq b \end{aligned}$$

(obsérvese que por eso se escogió $\delta = min\{a, \frac{b}{M}\}$)

2. Veamos por inducción que:

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq Mk^{n-1}\, \frac{|t - t_0|^n}{n!} \leq \frac{Mk^{n-1}\delta^n}{n!}$$

Si $n = 1$:

$$\begin{aligned} &|x_1(t) - x_0(t)| = |x_1(t) - x_0| = |\int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))\, ds| \\ &= |\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\, ds| \leq |\int_{t_0}^{t} |f(s, x_0|\, ds| = M|\int_{t_0}^{t} ds| = M|t - t_0| \leq M\delta \end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n = m$:

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq Mk^{m-1}\frac{|t - t_0|^m}{m!} \leq M\frac{k^{m-1}\delta^m}{m!}.$$

Veamos que se cumple para $n = m + 1$:
En efecto, como f es de Lipschitz en x sobre D: existe $k > 0$ tal que $\forall (t, x_1),\ (t, x_2) : |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$

luego

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| = |\int_{t_0}^{t} f(s, x_m(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x_{m-1}(s))\, ds|$$

$$= |\int_{t_0}^{t} (f(s, x_m(s)) - f(s, x_{m-1}(s)))\, ds| \leq |\int_{t_0}^{t} |f(s, x_m(s)) - f(s, x_{m-1}(s))|\, ds|$$

$$\leq k|\int_{t_0}^{t} |x_m(s) - x_{m-1}(s)|\, ds| \leq k|\int_{t_0}^{t} Mk^{m-1}\frac{|s-t_0|^m}{m!}\, ds|$$

$$= k^m M|\int_{t_0}^{t} \frac{|s-t_0|^m}{m!}\, ds = k^m M\frac{|t-t_0|^{m+1}}{(m+1)!} \leq k^m M\frac{\delta^{m+1}}{(m+1)!}$$

3. Veamos que $\{x_n(t)\}$ converge uniformemente a una función $x(t)$ para $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$; esto demostrará que $x(t)$ es continua en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

En efecto, $x_n(t) - x_0(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t) + x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t) + x_{n-2}(t) - \ldots + x_1(t) - x_0(t) = \sum_{m=1}^{n}[x_m(t) - x_{m-1}(t)]$

pero por 2. se tiene
$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq M\frac{k^{m-1}\delta^m}{m!} = \frac{M}{k}\frac{k^m\delta^m}{m!}$, con $|t - t_0| \leq \delta$

y como $\sum_{m=1}^{n} |x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq \frac{M}{k}\sum_{m=1}^{n}\frac{(k\delta)^m}{m!} = \frac{M}{k}(e^{k\delta} - 1)$

Por el criterio M de Weierstrass se concluye que

$$\sum_{m=1}^{n}[x_m(t) - x_{m-1}(t)]$$

converge absoluta y uniformemente para $|t - t_0| \leq \delta$ a una función única $y(t)$.

Pero

$$y(t) = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}[x_m(t) - x_{m-1}(t)] = \lim_{n\to\infty}[x_n(t) - x_0(t)] = \lim_{n\to\infty} x_n(t) - x_0(t)$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = y(t) + x_0(t) \equiv x(t)$$

es decir, el límite de las funciones de Picard existe y es uniforme para $|t - t_0| \leq \delta$; es decir, $x_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(t)$, para $|t - t_0| \leq \delta$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

4. Veamos que $x(t)$ es solución de $x'(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\ ds$ para $|t - t_0| \leq \delta$
Como $f(t, x)$ es continua en x y $x_{n(t)} \xrightarrow{c.u.} x(t), \quad |t - t_0| \leq \delta$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(t, x_n(t)) = f(t, x(t))$$

luego, por la definición de funciones de Picard

$$\begin{aligned} x(t) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}(t) &= x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\ ds \\ &\overset{h)}{=} x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f(s, x_n(s))\ ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\ ds \end{aligned}$$

luego $x(t)$ es solución de $x'(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\ ds$ ■

Teorema B.4 (Desigualdad de Gronwald).

Sea $x_1(t)$ una función continua y no negativa y si

$$x(t) \leq A + B|\int_{t_0}^{t} x(s)\ ds|$$

donde A y B son constantes positivas para todo t tal que $|t - t_0| \leq \delta$, entonces $x(t) \leq Ae^{B|t-t_0|}$ para $|t - t_0| \leq \delta$

Demostración: veamos el teorema para $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$. La demostración para $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$ es semejante.

Definimos $y(t) = B \int_{t_0}^{t} x(s)\ ds$
luego $y'(t) = Bx(t) \leq B(A + B \int_{t_0}^{t} x(s)\ ds) = AB + By(t)$
luego $y'(t) - By(t) \leq AB$ (1)
Pero $\frac{d}{dt}[y(t)e^{-B(t-t_0)}] = e^{-B(t-t_0)}[y'(t) - By(t)]$

Multiplicando (1) por $e^{-B(t-t_0)}$:

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-B(t-t_0)}) \leq ABe^{-B(t-t_0)}$$

e integrando a ambos lados, desde t_0 hasta t y sabiendo que $e^{-B(t-t_0)} > 0$, entonces

$$y(s)e^{-B(t-t_0)}|_{t_0}^{t} \leq -Ae^{-B(t-t_0)}|_{t_0}^{t}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

y como $y(t_0) = 0$ entonces $y(t)e^{-B(t-t_0)} \leq A(1 - e^{-B(t-t_0)})$
luego

$$y(t) \leq A(e^{B(t-t_0)} - 1)$$

y como $x(t) \overset{\text{hip.}}{\leq} A + By(t) \leq Ae^{B(t-t_0)}$ ■

Teorema B.5 (Unicidad).

Supongamos que se cumplen las condiciones del teorema de existencia. Entonces $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ es la única solución continua en $|t - t_0| \leq \delta$ del P.V.I.: $x'(t) = f(t, x(t))$ con $x(t_0) = x_0$ (1)

Demostración. supongamos que $x(t)$ y $y(t)$ son dos soluciones continuas y distintas del P.V.I. (1) en $|t - t_0| \leq \delta$ y supongamos que $(t, y(t)) \in D$ para todos $|t - t_0| \leq \delta$.

Sea $v(t) = |x(t) - y(t)|$ y por tanto $v(t) > 0$ y continua.
Como $f(t, x)$ es continua de Lipschitz en x sobre D, entonces

$$v(t) = |x_0 + \int_{t_o}^{t} f(s, x(s))\, ds - (x_0 + \int_{t_o}^{t} f(s, y(s))\, ds)| \leq$$
$$k|\int_{t_o}^{t} |x(t) - y(t)|\, ds| = k|\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds| < \epsilon + k|\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds|, \quad \forall \epsilon > 0$$

Por la desigualdad de Gronwall: $v(t) < \epsilon e^{k|t-t_0|}$, $\forall \epsilon > 0$ y por tanto $v(t) < 0$ y sabemos que $v(t) > 0$, de aquí que $v(t) = 0$ o sea que $x(t) = y(t)$ ■

Teorema B.6 (Teorema de Picard).

Si $f(t, x)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en D. Entonces existe una constante $\delta > 0$ tal que las funciones de Picard $\{x_n(t)\}$ convergen a una solución única y continua en $|t - t_0| \leq \delta$ del P.V.I. (1)

Demostración: es consecuencia directa del teorema A.2 y de los teoremas de existencia y unicidad. ■

Nota: este teorema se puede generalizar para sistemas de n ecuaciones con n incognitas

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Teorema B.7 (**Teorema de Picard Generalizado).**

Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a $\vec{x}_0$ y si $\vec{f} \in C^1(E)$. Entonces existe un $a > 0$ tal que el problema de valor inicial:

$$\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

tiene una solución única en el intervalo $[-a, a\vec{f}(t,x)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en D. Entonces existe una constante $\delta > 0$ tal que las funciones de Picard $\{x_n(t)\}$ convergen a una solución única y continua en $|t - t_0| \leq \delta$ del P.V.I. (1)

B.3. TEOREMAS LOCAL Y GLOBAL PARA SISTEMAS DE E. D. LINEALES

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{array}{ll} x_1' := f_1(t, x_1, \ldots, x_n) & x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2' := f_2(t, x_1, \ldots, x_n) & x_2(t_0) = x_{20} \\ \vdots & \\ x_n' := f_n(t, x_1, \ldots, x_n) & x_n(t_0) = x_{n0} \end{array} \tag{B.1}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

o sea que vectorialmente el sistema anterior queda así:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\,' = \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{x}}(t_0) = \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}} \tag{B.2}$$

donde $\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ = norma de $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$

Si $A_{n\times n}$, hay varias maneras de definir la norma de A.
La más sencilla es:

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Se puede mostrar que tanto para $\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\|$ como para $\|A\|$ se cumple que:

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

i) $\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\| \geq 0$ y $\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$

ii) $\|\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\| = |\alpha|\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\|$ para todo α escalar.

iii) $\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{y}}\| \leq \|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\| + \|\overrightarrow{\boldsymbol{y}}\|$

Además para el caso matricial también se cumple que $\|A\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\| \leq \|A\|\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\|$

Teorema B.8 (Teorema de existencia y unicidad).

Sea D la región $n+1$ dimensional (una para t y n para $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$), sea $|t-t_0| \leq a$ y $\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\| \leq b$.
Supongamos que $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t, \overrightarrow{\boldsymbol{x}})$ satisface la condición de Lipschitz

$$\|\overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1) - \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2)\| \leq k\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2\| \quad (*)$$

para$(t, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1), (t, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2) \in D$, donde $k > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que el sistema B.2 tiene una solución única $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$ en el intervalo $|t - t_0| \leq \delta$

Demostración. La condición (*) es consecuencia de que las $f_i(t, \overrightarrow{x})$ son de Lipschitz, es decir

$$|f_i(t, x_{11}, \ldots, x_{1n}) - f_i(t, x_{21}, \ldots, x_{2n})| \leq k_i \sum_{j=1}^{n} |x_{1j} - x_{2j}| \qquad (**)$$

tomando

$$k = n\sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i^2}$$

Lo anterior se deduce si se utiliza la desigualdad

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |x_j| \leq \|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

En efecto,

$$\|\overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1) - \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[f_i(t, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1) - f_i(t, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2)]^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(k_i \sum_{j=1}^{n} |x_{1j} - x_{2j}|)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i^2 (\sum_{j=1}^{n} |x_{1j} - x_{2j}|)^2}$$

Universidad de Antioquia, Depto de Matemáticas

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i^2 (n\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2\|)^2} = \sqrt{n^2\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2\|^2 \sum_{i=1}^{n} k_i^2}$$

$$= n\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2\|^2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i^2}$$

luego

$$k = n\sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i^2}$$

También

$$|f_i(t, x_{11}, \ldots, x_{1n}) - f_i(t, x_{21}, \ldots, x_{2n})| \leq k_i \max_{j=1,\ldots,n} |x_{1j} - x_{2j}| \qquad (***)$$

Verificar (**) y (***) es más fácil que verificar (*).

Por último, si $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ (para $i, j = 1, \ldots, n$) son continuas en D, entonces son acotadas en D y las condiciones (**) y (***) resultan por el teorema del valor medio.

Ahora veamos la existencia y unicidad globales de soluciones de sistemas lineales con coeficientes continuos.

Sea

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\,'(t) = A(t)\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{x}}(t_0) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0, \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad (1)$$

y $A(t)$ una matriz $n \times n$ ■

Teorema B.9 (Existencia y unicidad para sistemas lineales).

Sean $A(t)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t)$ una función matricial y vectorial respectivamente, continuas en $\alpha \leq t \leq \beta$. Entonces existe una función vectorial única $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}(t)$ que es solución de (1) en $[\alpha, \beta]$

Demostración: definimos las funciones iteradas de Picard

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0(s) + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(s)]\, ds$$

Universidad de Antioquia Depto. de Matematicas

$$\vdots$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_{n+1}(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_n(s) + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(s)]\, ds$$

$$\vdots$$

Claramente estas iteradas son continuas en $[\alpha, \beta]$ para $n = 1, \ldots, n$. Como $A(t)$ es una función matricial continua, entonces

$$\sup_{\alpha \le t \le \beta} \|A(t)\| = \sup_{\alpha \le t \le \beta} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| = k < \infty$$

Sea

$$M = \sup_{\alpha \le t \le \beta} \|A(t)\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t)\| < \infty$$

el cual existe ya que $A(t)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t)$ son continuas en un cerrado.

i) Observemos que para cualquier par de vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1$, $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2$ y para

$$\begin{aligned} \alpha \le t \le \beta, \quad \|[A(t)\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t)] - [A(t)\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2 + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t)]\| &= \|A(t)(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2)\| \\ &\le \|A(t)\| \ \|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2\| \le k\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2\| \end{aligned}$$

luego la función $A(t)\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}$ es de Lipschitz para cualquier $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$ y $\alpha \le t \le \beta$

ii) Por inducción, veamos que las iteradas de Picard satisfacen la desigualdad

$$\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_n(t) - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_{n-1}(t)\| \le Mk^{n-1}\frac{|t - t_0|^n}{n!} \le Mk^{n-1}\frac{(\beta - \alpha)^n}{n!}$$

Si $n = 1$:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1(t) - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0(t)\| = &\ \Big\| \int_{t_0}^{t} \Big[A(s)\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(s)\Big]\, ds \Big\| \le \\ &\Big| \int_{t_0}^{t} \Big\| A(s)\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(s) \Big\|\, ds \Big| \le M \Big| \int_{t_0}^{t} ds \Big| = M|t - t_0| \le M(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n = m$. Veamos que se cumple para $n = m + 1$:

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matemáticas

$$\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_{m+1}(t) - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_m(t)\| \leq$$
$$\Big|\int_{t_0}^{t}\Big\|\Big[A(s)\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_m(s) + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(s)\Big] - \Big[A(s)\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_{m-1}(s) + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(s)\Big]\Big\|\, ds\Big| \leq$$
$$k\Big|\int_{t_0}^{t}\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_m(s) - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_{m-1}(s)\|\, ds\Big| \leq k\Big|\int_{t_0}^{t} Mk^{m-1}\frac{|s-t_0|^m}{m!}\, ds\Big| =$$
$$= Mk^m\frac{|t-t_0|^{m+1}}{(m+1)!} \leq Mk^m\frac{(\beta-\alpha)^{m+1}}{(m+1)!}$$ ■

Nota: la diferencia entre estos teoremas y el A.3 es que en el caso lineal la cota M puede definirse independiente de x, mientras que en el A.3 debe restringirse x y t. Esta diferencia demuestra el resultado de existencia única en todo el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$

Corolario B.1 (Teorema de existencia y unicidad global).

Sean $A(t)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t)$ continuas en $-\infty \leq t \leq \infty$. Entonces existe una única solución continua $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}(t)$ de $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\,'(t) = A(t)\,\overrightarrow{\boldsymbol{x}}(t) + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t)$ con $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}(t_0) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$ definida para <u>todo</u> $-\infty \leq t \leq \infty$

Demostración: supongamos que $|t_0| \leq n$. Sea $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_n(t)$ la única solución de

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\,' = A(t)\overrightarrow{\boldsymbol{x}}(t) + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{x}}(t_0) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$$

en el intervalo $|t| \leq n$ la cual esta garantizada por el teorema anterior. Notemos que $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_n(t)$ coincide con $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_{n+k}(t)$ en el intervalo $|t| \leq n$ para $k = 1, 2, \ldots$.
Luego $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_n(t) = \lim_{n\to\infty}\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_n(t)$ esta definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y es única, ya que esta definida de manera única en cada intervalo finito que contiene a t_0 ■

Universidad de Antioquia Depto. de Matematicas

APÉNDICE C

EXPONENCIAL DE OPERADORES

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Sea $\pounds(\mathbb{R}^n)$ el espacio de los operadores $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Definición C.1 (**Norma de** T**).**

$$\|T\| = \textit{norma de } T = \operatorname*{máx}_{|\vec{x}|\leq 1} |T(\vec{x})|$$

donde $|\vec{x}|$ *es la norma euclídea de* $|\vec{x}| \in \mathbb{R}^n$*, es decir*

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Propiedades: para $S,\ T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$ se cumple

a). $\|T\| \geq 0$ y $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$

b). para $k \in \mathbb{R}$: $\|kT\| = |k|\|T\|$

c). $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$

Recordemos que en $\mathbb{R}^n$ la representación de un operador se hace por medio de la matriz $A_{n\times n}$ y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwars se llega a que $\|A\| \leq \sqrt{n}\ \ell$ donde ℓ es la máxima longitud de los vectores fila de A.

Definición C.2 (Convergencia de operadores). *Una sucesión* $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ *de operadores en* $\pounds(\mathbb{R}^n)$ *se dice que converge a un operador* $T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$ *cuando* $k \to \infty$ *si para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $k \geq N$ *se cumple que*

$$\|T - T_k\| < \epsilon$$

y lo denotamos así

$$\lim_{k\to\infty} T_k = T$$

Lema C.1. *Para* $S,\ T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$ *y* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *se cumple que*

a). $|T(x)| \leq \|T\|\ |\vec{x}|$

b). $\|T\ S\| \leq \|T\|\ \|S\|$

c). $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ *para* $k = 0, 1, 2, \ldots$

Demostración. a). para $|\vec{x}| = |\vec{0}|$ es inmediato
para $\vec{x} \neq \vec{0}$, definimos $\vec{y} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$, por la definición de norma para T:

$$\|T\| \geq |T(y)| = |T(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|})| = \frac{1}{|\vec{x}|}|T(x)|$$

luego $\|T(\vec{x}\| \leq |\vec{x}|\ \|T\|$

b). para $|\vec{x}| \leq 1$; por a).:

$$|T(S(x))| \leq \|T\|\ |S(\vec{x}| \leq \|T\|\ \|S\|\ |\vec{x}|$$

luego

$$\|TS\| = \max_{|\vec{x}|\leq 1} |TS(\vec{x})| \leq \|T\|\ \|S\|$$

c). es inmediato a partir de b).

■

Teorema C.1.

Sea $T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$ *y* $t_0 > 0$, *entonces la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

es uniforme y absolutamente convergente para todo $t \leq t_0$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Demostración: sea $\|T\| = a$; por c). en el lema anterior: para $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left\|\frac{T^k t^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|T\|^k |t|^k}{k!} \leq \frac{a^k t_0^k}{k!}$$

pero $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{k!} = e^{at_0}$ y por la prueba M de Wieirstrass concluimos que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

es uniforme y absolutamente convergente para todo $|t| \leq t_0$ ■

Definición C.3 (Exponencial de un operador). $e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$

Propiedades:

i. e^T es un operador lineal, es decir, $e^T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$

ii. $\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$ (Ver Demostración del Teorema A.9)

Si $T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$ entonces su representación matricial la llamamos $A_{n\times n}$ con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Definición C.4 (Exponencial de una matriz). *Sea $A_{n\times n}$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, definimos*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Si $A_{n\times n}$ entonces e^{At} es una matriz $n \times n$, la cual calculamos en el Capitulo 7.
También se demuestra de la misma manera que en el Teorema A.9, que $\|e^{At}\| \leq e^{\|A\|\, t}$, donde $\|A\| = \|T\|$ y $T(\vec{x}) = A\,\vec{x}$

Teorema C.2.

Si S, $T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$ entonces

a). Si $S\,T = T\,S$ entonces $e^{S+T} = e^S\, e^T$

b). $\left(e^T\right)^{-1} = e^{-T}$

Universidad de Antioquia. Depto. de Matematicas

Demostración. a). Como $S\ T = T\ S$, entonces por el Teorema del binomio

$$(S+T)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!}$$

Teniendo en cuenta que el producto de dos series absolutamente convergentes es absolutamente convergente, entonces

$$e^{S+T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S+T)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^j}{j!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = e^S e^T$$

b). haciendo $S = -T$ en a).: $e^0 = I = e^{-T}\ e^T$ y por tanto $(e^T)^{-1} = e^{-T}$

■

Ahora veamos el teorema de la derivada de una exponencial matricial.

Teorema C.3 (**Derivada de una función exponencial matricial**).

Sea A una matriz cuadrada, entonces

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A\ e^{At}$$

Demostración: como A conmuta consigo mismo, entonces por el Teorema C.2 y la definiciín de exponencial matricial, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e^{At} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \lim_{h\to 0}\ e^{At} \frac{e^{Ah} - I}{h} \\
&= e^{At} \lim_{h\to 0} \lim_{k\to\infty} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \ldots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \\
&= A e^{At}
\end{aligned}$$

■

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

APÉNDICE D

TEOREMA DE LIÉNARD

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Dijimos en el capítulo 8 que la E.D.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\,\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \tag{D.1}$$

se le llama ecuación de Liénard y el sistema equivalente, llamado sistema de Liénard, es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -g(x) - f(x)y \end{aligned} \tag{D.2}$$

como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\,\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt} + \int_0^x f(x)dx\right] = \frac{d}{dt}\left[y + F(x)\right] \tag{D.3}$$

esto último sugiere que hagamos el siguiente cambio de variable

$$z = y + F(x),$$

donde $F(x) = \int_0^x f(x)dx$, con este cambio de variable el sistema D.2 queda convertido en el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= z - F(x) \\ \frac{dz}{dt} &= -g(x) \end{aligned} \tag{D.4}$$

y eliminando t nos queda la E.D.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-g(x)}{z - F(x)}.$$

Para la demostración del Teorema de Liénard (Ver el texto Differential Equations and Dynamical Systems de Lawrence Perko) necesitamos hacer $G(x) = \int_0^x g(x)dx$, utilizar la función de energia $u(x,z) = \frac{z^2}{2} + G(x)$ y tengamos en cuenta que la derivada de una función impar es una función par y la integral definida entre 0 y x de una función impar es una función par.

Teorema D.1 (**Teorema de Liénard).**

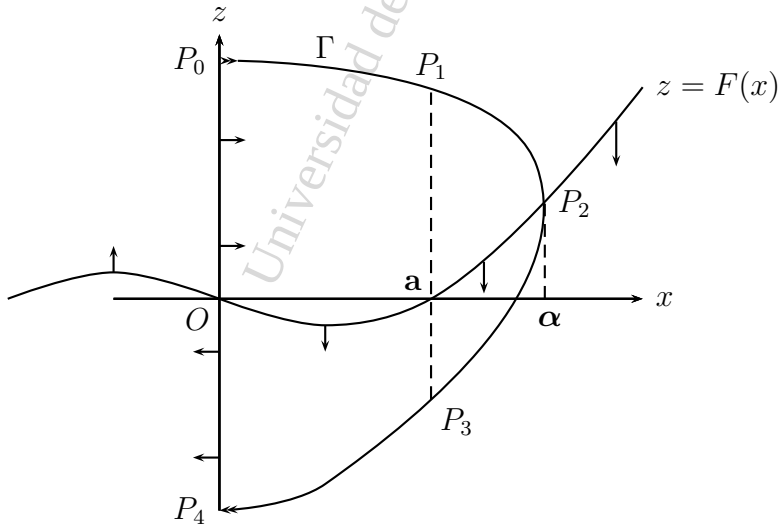
Sean $F(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que:

i. Ambas son continuas así como sus primeras derivadas para todo x.

ii. $F(x)$ y $g(x)$ son impares, tales que $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$ y $F(0) = 0$, $F'(0) < 0$.

iii. $F(x)$ tiene un único cero positivo en $x = a$; es negativa para $0 < x < a$; es positiva y monótona creciente para $x \geq a$ y $F(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$,

entonces la ecuación (D.4) tiene un único ciclo límite que rodea al orígen en el plano de fase y a ella tienden en forma de espiral todas las demás trayectorias cuando $t \to \infty$, es decir, es un ciclo límite estable.



Universidad de Antioquia Depto de Matemáticas

Demostración. Antes de comenzar la demostración del teorema, tengamos en cuenta que la condición i. garantiza, por el teorema de Picard, la existencia de una solución única por cada punto del plano de fase XY. la condición ii. y la continuidad de g, implica que $g(0) = 0$, por lo tanto $(0, 0)$ es el único punto crítico del sistema D.4, el campo de direcciones sobre el eje Z positivo es horizontal y hacia la derecha (porque $\frac{dx}{dt} > 0$ y $\frac{dz}{dt} = 0$) y sobre el eje Z negativo es horizontal y hacia la izquierda, sobre la curva $z = F(x)$ el campo de direcciones es vertical y dirijido hacia abajo si $x > 0$ (porque $\frac{dx}{dt} = 0$ y $\frac{dz}{dt} < 0$) y es vertical y dirijido hacia arriba para $x < 0$. También, como el sistema D.4 es invariante al cambiar (x, z) por $(-x, -z)$ entonces, si $\Gamma(x(t), z(t))$ es una trayectoria del sistema D.4 entonces $\Gamma(-x(t), -z(t))$ también es una trayectoria del mismo sistema, esto quiere decir que si Γ_0 es una trayectoria cerrada del sistema (o sea es periódica) entonces deber ser simétrica respecto al origen.
Sea Γ una trayectoria cualquiera del sistema D.4 y sean P_i puntos sobre la trayectoria con coordenadas (x_i, z_i) para $i = 1, 2, 3, 4$ (Ver el figura). Por la forma del campo de direcciones sobre el eje Z positivo y sobre la curva $z = F(x)$, la trayectoria Γ que pasa por P_0 debe cruzar **verticalmente** y hacia abajo, la curva $z = F(x)$ en el punto P_2 y por tanto debe cruzar horizontalmente y hacia la izquierda el eje Z negativo.
Debido a la invarianza del sistema al cambiar (x, z) por $(-x, -z)$, entonces Γ es una trayectoria cerrada si y solo si P_0 y P_4 son simétricos respecto al origen, es decir, si y solo si $z_4 = -z_0$ y utilizando la función de energía $u(x, z) = \frac{z^2}{2} + G(x)$ se debería cumplir que $u(0, z_4) = u(0, z_0)$. Sea A el arco que va desde P_0 hasta P_4 sobre la trayectoria Γ y definamos la función $\phi(\alpha)$ como la siguiente integral de línea

$$\phi(\alpha) = \int_A du = u(0, y_4) - u(0, y_0)$$

donde α es la abscisa del punto P_2, es decir $\alpha = x_2$, veamos que Γ es una trayectoria cerrada del sistema si y solo si $\phi(\alpha) = 0$, para ello mostremos que la función $\phi(\alpha)$ tiene exactamente una raíz $\alpha = \alpha_0$ para $\alpha_0 > a$. Notemos que sobre Γ

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial z}dz = G'(x)dx + zdz = g(x)dx + (\frac{dx}{dt} + F(x))dz$$

y como $g(x) = -\frac{dz}{dt}$ y $dz = \frac{dz}{dx}dx$ y utilizando la regla de la cadena, concluimos que

$$du = -\frac{dz}{dt}dx + \frac{dx}{dt}dz + F(x)dz = -\frac{dz}{dt}dx + \frac{dx}{dt}\frac{dz}{dx}dx + F(x)dz =$$

Universidad de Antioquia. Dept. de Matemáticas

$$= -\frac{dz}{dt}dx + \frac{dz}{dt}dx + F(x)dz = F(x)dz$$

Si $\alpha < a$ entonces $F(x) < 0$ y $dz = -g(x)dt < 0$ y por tanto $du > 0$ o sea que $\phi(\alpha) > 0$, luego $u(0, z_4) > u(0, z_0)$, en conclusión cualquier trayectoria Γ que cruce la curva $z = F(x)$ en un punto P_2 con $0 < x_2 = \alpha < a$ debe ser no cerrada.

Ahora veamos que para todo $\alpha \geq a$, la función $\phi(\alpha)$ es monótona decreciente y decrece desde el valor positivo $\phi(a)$ hacia $-\infty$ cuando α crece en el intervalo $[0, \infty)$.

Para $\alpha > a$ como en la figura, descomponemos el arco A en tres arcos: A_1 que va desde P_0 hasta P_1, A_2 que va desde P_1 hasta P_3, A_3 que va desde P_3 hasta P_4 y definimos las tres funciones (que son integrales de línea):

$$\phi_1(\alpha) = \int_{A_1} du, \qquad \phi_2(\alpha) = \int_{A_2} du, \qquad \phi_3(\alpha) = \int_{A_3} du,$$

por lo tanto, $\phi(\alpha) = \phi_1(\alpha) + \phi_2(\alpha) + \phi_3(\alpha)$. A lo largo de Γ se tiene que

$$\begin{aligned} du = F(x)dz &= \left(z - \frac{dx}{dt}\right)\frac{dz}{dx}dx = z\frac{dz}{dx}dx - \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}dx = z\frac{dz}{dx}dx - \frac{dz}{dt}dx \\ &= \left(g(x) + z\frac{dz}{dx}\right)dx = \left(g(x) - z\frac{g(x)}{z - F(x)}\right)dx = \frac{-F(x)g(x)}{z - F(x)}dx \end{aligned}$$

A lo largo de los arcos A_1 y A_3, $F(x) < 0$ y $g(x) > 0$ y $\frac{dx}{z-F(x)} = dt > 0$, por lo tanto $\phi_1(\alpha) > 0$ y $\phi_3(\alpha) > 0$ y a lo largo de A_2 $F(x) > 0$ y $g(x) > 0$ y $\frac{dx}{z-F(x)} = dt > 0$, por lo tanto $\phi_2(\alpha) < 0$. Como las trayectorias Γ del sistema D.4 (por el Teorema de Picard) no se cruzan, entonces un aumento de α implica que el arco A_1 sube (o lo que es lo mismo el punto P_0 sube), el arco A_2 baja (o lo que es lo mismo el punto P_4 baja) y en el arco A_3 el punto P_2 se desplaza hacia la derecha (o sea que $x_2 = \alpha$ aumenta).

A lo largo de A_1 los límites de integración con respecto a x de la integral de línea permanecen constantes ($x_0 = 0$ y $x_1 = a$) y para cada x fijo de $[0, a]$, al aumentar α, sube el arco A_1, lo cual quiere decir que se incrementa z y por tanto el integrando $\frac{-F(x)g(x)}{z-F(x)}$ de la integral de línea disminuye y por lo tanto $\phi_1(\alpha)$ decrece.

A lo largo de A_3 los límites de integración con respecto a x de la integral de linea permanecen constantes ($x_3 = a$ y $x_4 = 0$) y para cada x fijo de $[0, a]$ al aumentar α, baja el arco A_3, lo cual quiere decir que z decrece y por tanto

Universidad de Antioquia. Depto. de Matemáticas

el integrando $\frac{-F(x)g(x)}{z-F(x)}$ de la integral de línea disminuye en magnitud y por lo tanto $\phi_3(\alpha)$ decrece, puesto que

$$\phi_3(\alpha) = \int_a^0 \frac{-F(x)g(x)}{z-F(x)}dx = \int_0^a \left|\frac{-F(x)g(x)}{z-F(x)}\right| dx$$

A lo largo de A_2, escribimos $du = F(x)dx$, como lo dijimos anteriormente, las trayectorias no se interceptan, un aumento de α implica que P_2 se desplaza hacia la derecha, como a lo largo de A_2 los límites de integración con respecto a z permanecen constantes (son z_1 y z_3) y además para cada z en el intervalo $[z_3, z_1]$, al incrementar x se incrementa $F(x)$ y por lo tanto

$$\phi_3(x) = \int_{z_1}^{z_3} F(x)dz = -\int_{z_3}^{z_1} F(x)dz$$

decrece, en particular para $x = \alpha$, $\phi_3(\alpha)$ es decreciente. Hemos encontrado que $\phi_1(\alpha)$, $\phi_2(\alpha)$ y $\phi_3(\alpha)$ son decrecientes, por lo tanto $\phi(\alpha)$ es monótona decreciente para $\alpha \geq a$.

Falta por demostrar que $\phi(\alpha) \to -\infty$ cuando $\alpha \to \infty$, para ello basta con demostrar que $\phi_2(\alpha) \to -\infty$ cuando $\alpha \to \infty$. Como a lo largo de A_2, $du = F(x)dz = -F(x)g(x)dt < 0$, entonces para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y teniendo en cuenta que $F(x)$ es monótona creciente para $x > a$ y $z_3 < 0$:

$$\begin{aligned}
|\phi_2(\alpha)| = -\int_{z_1}^{z_3} F(x)dz = \int_{z_3}^{z_1} F(x)dz &> \int_{z_3+\epsilon}^{z_1-\epsilon} F(x)dz \\
&> F(\epsilon)\int_{z_3+\epsilon}^{z_1-\epsilon} dz = F(\epsilon)(z_1 - z_3 - 2\epsilon) \\
&> F(\epsilon)(z_1 - 2\epsilon)
\end{aligned}$$

pero como $z_1 > z_2$ y $z_2 \to \infty$ cuando $x_2 = \alpha \to \infty$, por lo tanto $|\phi_2(\alpha)| \to \infty$ cuando $\alpha \to \infty$ o sea que $\phi_2(\alpha) \to -\infty$ cuando $\alpha \to \infty$.

Como $\phi(\alpha)$ es una función continua que decrece monotónicamente desde el valor positivo $\phi(a)$ hacia $-\infty$ entonces existe un α_0 en (a, ∞) tal que $\phi(\alpha_0) = 0$, por lo tanto existe una única trayectoria cerrada Γ_0 que pasa por el punto $(\alpha_0, F(\alpha_0))$.

Para finalizar, como $\phi(\alpha) < 0$ para $\alpha > \alpha_0$ entonces por la simetría del sistema D.4, para $\alpha \neq \alpha_0$ la sucesión de los puntos de intersección con el eje Z de las trayectorias Γ que pasan por el punto $(\alpha, F(\alpha))$, tienden a la ordenada z de intersección de Γ_0 con el eje Z, es decir, Γ_0 es un ciclo límite estable. ■

Universidad de Antioquia Dpto de Matemáticas

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

APÉNDICE E

FRACCIONES PARCIALES

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Expondremos a continuación un método para hallar fracciones parciales, distinto al expuesto tradicionalmente en los cursos de Cálculo. Este método es útil en el Capítulo de Transformada de Laplace.

E.1. Factores lineales no repetidos.

Consideremos la fracción

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\dots(s-a_n)}$$

donde $N(s), D(s)$son polinomios de coeficientes reales y el grado de $N(s)$ es menor que el grado de $D(s)$ y no tienen factores comunes. Entonces

$$\frac{N(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\dots(s-a_n)} = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + \dots + \frac{A_n}{s-a_n},$$

multiplicando ambos lados por $s-a_i$ y hallando el límite del resultado cuando $s \to a_i$ se obtiene

$$A_i = \frac{N(a_i)}{M_i(a_i)},$$

donde M_i es el denominador obtenido después de haber suprimido el factor $s-a_i$ en $D(s)$.

Método 1. Para hallar el numerador de la fracción simple $\frac{A_i}{s-a_i}$ de una fracción propia

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\dots(s-a_n)},$$

se suprime el factor $s-a_i$ en el denominador de $\frac{N(s)}{D(s)}$ y se sustituye s por a_i en la supreción.

Ejemplo 1. Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2+s+1}{s(s-1)(s+2)}$$

Solución. $\frac{s^2+s+1}{s(s-1)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-1} + \frac{A_3}{s+2}$, donde $D(s) = s(s-1)(s+2)$
Por el método 1.

$$A_1 = \left.\frac{N(s)}{(s-1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{0^2+0+1}{(0-1)(0+2)} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \left.\frac{N(s)}{s(s+2)}\right|_{s=1} = \frac{1^2+1+1}{(1)(1+2)} = 1$$

$$A_3 = \left.\frac{N(s)}{s(s-1)}\right|_{s=-2} = \frac{(-2)^2-2+1}{(-2)(-2-1)} = \frac{1}{2}$$

E.2. Factores Lineales Repetidos.

Empleamos el símbolo $\left[\frac{N(s)}{M(S)}\right]_a^{(i)}$, para designar el número obtenido al sustituir s por a en $\frac{d^i}{ds^i}[\frac{N(s)}{M(s)}]$, es decir,

$$\left[\frac{N(s)}{M(s)}\right]_a^{(i)} = \frac{d^i}{ds^i}\left[\frac{N(s)}{M(s)}\right]_{s=a}$$

entonces

$$\frac{N(s)}{M(s)(s-a)^k} = \frac{A_1}{(s-a)^k} + \frac{A_2}{(s-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{(s-a)} + \phi(s) \qquad \text{(E.1)}$$

donde $\phi(s)$ y sus derivadas son continuas en a; multiplicando E.1 por $(s-a)^k$ y derivando $k-1$ veces con respecto s y hallando los valores de los A_i al cambiar s por a se obtiene

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Método 2.

$$\frac{N(s)/M(s)}{(s-a)^k} = \frac{[N/M]_a^{(0)}}{0!(s-a)^k} + \frac{[N/M]_a^{(1)}}{1!(s-a)^{k-1}} + \frac{[N/M]_a^{(2)}}{2!(s-a)^{k-2}} + \dots + \frac{[N/M]_a^{(k-1)}}{(k-1)!(s-a)} + \phi(s)$$

donde $\phi(s)$ y sus derivadas son continuas en a.

Ejemplo 2. Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{5s^2-23s}{(2s-2)(2s+4)^4}$$

Solución.

$$\frac{5s^2-23s}{(2s-2)(2s+4)^4} = \frac{1}{32}\frac{5s^2-23s}{(s-1)(s+2)^4} = \frac{1}{32}\left[\frac{[N/M_1]_{-2}^{(0)}}{0!(s+2)^4} + \frac{[N/M_1]_{-2}^{(1)}}{1!(s+2)^3} + \frac{[N/M_1]_{-2}^{(2)}}{2!(s+2)^2} + \frac{[N/M_1]_{-2}^{(3)}}{3!(s+2)} + \frac{[N/M_2]_{1}^{(0)}}{0!(s-1)}\right]$$

donde $N(s)/M_1(s) = \frac{5s^2-23s}{s-1}$ y $N(s)/M_2(s) = \frac{5s^2-23s}{(s+2)^4}$

Por el método 2. se tiene

$$\left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]_{-2}^{(0)} = \frac{5(-2)^2-23(-2)}{-2-1} = -22$$

$$\left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]^{(1)} = \frac{5s^2-10s+23}{(s-1)^2} \Longrightarrow \left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]_{-2}^{(1)} = \frac{5(-2)^2-10(-2)+23}{(-2-1)^2} = 7$$

$$\left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]^{(2)} = \frac{-36s+36}{(s-1)^4} = -36\frac{1}{(s-1)^3} \Longrightarrow \left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]_{-2}^{(2)} = -36\frac{1}{(-2-1)^3} = \frac{4}{3}$$

$$\left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]^{(3)} = \frac{108}{(s-1)^4} \Longrightarrow \left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]_{-2}^{(3)} = \frac{108}{(-2-1)^4} = \frac{4}{3}$$

$$\left[\frac{N(s)}{M_2(s)}\right]^{(0)} = \frac{5s^2-23s}{(s+2)^4} \Longrightarrow \left[\frac{N(s)}{M_2(s)}\right]_{1}^{(0)} = \frac{5(1)^2-23(1)}{(1+2)^4} = -\frac{2}{9}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

Luego

$$\frac{5s^2-23s}{(2s-2)(2s+4)^4} =$$
$$\frac{1}{32}\left[\frac{-22}{0!(s+2)^4}+\frac{7}{1!(s+2)^3}+\frac{\frac{4}{3}}{2!(s+2)^2}+\frac{\frac{4}{3}}{3!(s+2)}+\frac{-\frac{2}{9}}{0!(s-1)}\right] =$$
$$\frac{1}{32}\left[-\frac{22}{(s+2)^4}+\frac{7}{(s+2)^3}+\frac{2}{3}\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{2}{9}\frac{1}{(s+2)}-\frac{2}{9}\frac{1}{(s-1)}\right]$$

E.3. Factores Cuadráticos.

Sea

$$\frac{N(s)}{M(s)[s-(a+ib)][s-(s-(a-ib)]}$$

con $M(a+ib)\neq 0$. A los factores $s-(a+ib)$, $s-(a-ib)$ les corresponden la suma de fracciones parciales

$$\frac{A+iB}{s-(a+ib)}+\frac{A-iB}{s-(a-ib)}.$$

Para hallar $A+iB$ o $A-iB$ se procede de la misma manera que en el caso a). (Método 1.), es decir, se suprime el factor $s-(a+ib)$ (o $s-(a-ib)$), quedando $\frac{N(s)}{M(s)[s-(a-ib)]}$ y luego se cambia s por $a+ib$, es decir,

$$A+iB=\frac{N(a+ib)}{M(a+ib)2ib}, \qquad A-iB=\frac{N(a-ib)}{M(a-ib)(-2ib)}$$

Ejemplo 3. Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{s^2+2}{s(s^2+2s+2)}$$

Solución.

$$\frac{s^2+2}{s(s^2+2s+2)}=\frac{s^2+2}{s(s-(-1+i))(s-(-1-i))}=$$
$$\frac{A}{s}+\frac{B+iC}{s-(-1+i)}+\frac{B-iC}{s-(-1-i)}$$

$$A=\left.\frac{s^2+2}{s^2+2s+2}\right|_{s=0}=\frac{0^2+2}{0^2+2(0)+2}=1$$

Universidad de Antioquia. Depto. de Matemáticas

$$B + iC = \frac{N(-1+i)}{M(-1+i)2i,1} = \frac{(-1+i)^2+2}{(-1+i)2i} = -\frac{1}{i} = i$$

por lo tanto $B = 0,\ C = 1$
luego $\frac{s^2+2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{i}{s-(-1+i)} + \frac{-i}{s-(-1-i)}$

E.4. Factores Cuadráticos Repetidos.

Sea

$$\frac{N(s)}{M(s)(s-(a+ib))^k(s-(a-ib))^k} = \frac{\left[\frac{N(s)}{M(s)(s-(a-ib))^k}\right]}{(s-(a+ib))^k} =$$
$$\frac{A_1+iB_1}{(s-(a+ib))^k} + \frac{A_2+iB_2}{(s-(a+ib))^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k+iB_k}{(s-(a+ib))} + \phi(s)$$

Se procede de la misma manera que en b). (Método 2.) y se obtiene que

$$A_j + iB_j = \frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{N(s)}{M(s)(s-(a-ib))^k}\right]^{(j-1)}_{s=a+ib} =$$
$$\frac{1}{(j-1)!}\frac{d^j}{ds^j}\frac{N(s)}{M(s)(s-(a-ib))^k}\bigg|_{s=a+ib}$$

para $j = 1, \ldots, k$.

Ejemplo 4. Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{s^2+8}{s(s^2-4s+8)^2}$$

Solución.

$$\frac{s^2+8}{s(s^2-4s+8)^2} = \frac{s^2+8}{s(s-(2+2i))^2(s-(2-2i))^2} =$$
$$\frac{A}{s} + \frac{B+iC}{[s-(2+2i)]^2} + \frac{B-iC}{[s-(2-2i)]^2} + \frac{D+iE}{s-(2+2i)} + \frac{D-iE}{s-(2-2i)}$$

donde

$$A = \frac{s^2+8}{(s^2-4s+8)^2}\bigg|_{s=0} = \frac{8}{8^2} = \frac{1}{8}$$

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas

$$B + iC = \frac{1}{0!}\left[\frac{N(s)}{M(s)(s-(2-2i))^2}\right]^{(0)}_{s=2+2i} =$$

$$\frac{(2+2i)^2+8}{(2+2i)[(2+2i)-(2-2i)]^2} = \frac{(2+2i)^2+8}{(2+2i)[4i]^2} = -\frac{1}{4}$$

luego $B = -\frac{1}{4}$ y $C = 0$.

$$D + iE = \frac{1}{1!}\left[\frac{N(s)}{M(s)(s-(2-2i))^2}\right]^{(1)}_{s=2+2i} =$$

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{N(s)}{M(s)(s-(2-2i))^2}\right]\Bigg|_{s=2+2i} =$$

$$\frac{2s^2(s-(2-2i))^2-(s^2+8)(s-(2-2i))(3s-(2-2i))}{s^2(s-(2-2i))^4}\Bigg|_{s=2+2i} =$$

$$= -\frac{1}{16} - \frac{3}{16}i$$

luego $D = -\frac{1}{16}$ y $E = -\frac{3}{16}$

por lo tanto

$$\frac{s^2+8}{s(s^2-4s+8)^2} =$$

$$\frac{1}{8}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{(s-(2+2i))^2} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{(s-(2-2i))^2}$$

$$-\frac{1}{16}\,\frac{1+3i}{s-(2+2i)} - \frac{1}{16}\,\frac{1}{s-(2-2i)}$$

Universidad de Antioquia, Dpto. de Matematicas

BIBLIOGRAFÍA

Universidad de Antioquia, Depto de Matematicas

[1] Simmons George F. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, segunda edición.

[2] Derrick William R.,Grossman Stanley I. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones*, segunda edición.

[3] C.H. Edwards, Jr., Penney David E. *Ecuaciones Diferenciales elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera* , tercera edición.

[4] Zill Dennis G. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones* , segunda edición.

[5] Henao G. Dashiell, Moreno R. Gilberto, Osorio G. Luis Javier, Restrepo G. Gonzalo, Velásquez E. José *Ecuaciones Diferenciales*, primera edición.

[6] Farkas Miklós *Dynamical Models in Biology*, primera edición.

[7] Farkas Miklós *Periodic Motions* , primera edición.

[8] Perko Lawrence *Differential Equations and Dynamical Systems* , tercera edición.

[9] Hirsch, M. W.; Smale W. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Lineal Algebra* , primera edición.

[10] Strogatz, S. H *Nonlinear dynamics an chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engeneering* , primera edición.

ÍNDICE ALFABÉTICO

Universidad de Antioquia Depto de Matematicas

Abel
  fórmula de, 91
Algoritmo para cadenas de vectores propios generalizados, 265
Algoritmo para hallar las soluciones de un sistema de E.D. , 259
Amplitud del movimiento armónico simple, 143
Amplitud modulada (A.M.), 147
Angulo de fase, 143, 146
Aplicaciones
  crecimiento de cultivos, 58
  crecimientos poblacionales, 58
  a la física, 73
  a la geometría analítica, 54
  campo gravitacional variable, 77
  cohetes, 76
  crecimiento, descomposición, 55
  cuerpos con masa variable, 76
  de las E.D. de segundo orden
    osciladores, 141
  desintegración radioactiva, 56
  movimiento armónico simple, 141
  osciladores, 141
  problema de amplitud modulada, 147
  problemas de diluciones, 59
  problemas de persecución, 51
  vaciado de tanques, 68
Asintóticamente estable, 294
Ayry
  ecuación diferencial
    de, 174

Bendixsón
  criterio de, 344
Bernoulli
  ecuación diferencial de, 31
Bessel
  ecuación diferencial, 190
  función
    de primera especie, 192, 197
    de segunda especie, 194, 199
    propiedades, 199
  función de, 190
Bibliografía, 393

$C^n(I)$, 82
Cadena de vectores propios generalizados, 263
Campo de
  direcciones , 5
  pendientes, 5

Ciclo límite, 339
Circuitos en serie, 149
Clairaut
    ecuación diferencial de, 41
Coeficientes indeterminados, método, 109
Comandos Maple
    ...:=..., 46, 161
    BesselJ(,), 210
    BesselY(,), 210
    campo de direcciones, 5
    coeff(,), 209
    collect(,[,]) , 163
    convert(...,parfrac,...), 243
    DE(tools), 162
    DEplotwith, 350
    diff(,), 163
    dsolve, 46, 162, 208
    for k from n to m do... , 209
    int, 46, 164
    invlaplace, 245
    laplace(...,t,s), 244
    linsolve(,[,]), 164
    phaseportrait, 350, 352
    plot, 162, 210
    restart, 46, 162
    SeriesSol, 209
    simplify(,), 164, 209
    solve, 46, 161
    vector([,]), 164
    with(inttrans), 244
    with(linalg), 163
    wronskian(,), 164
Condición
    de frontera, 87
    inicial, 87
Conjunto fundamental
    de soluciones, 250
Constante
    de amortiguamiento, 143
    de fricción, 143
    de Euler, 194
Constante elástica del resorte, 141
Constantes de una solución, 3, 7
Convergencia de operadores, 378
Convergencia uniforme, 363
Convolutivo, producto, 225
Cramer
    regla de, 113
Criterio de Bendixsón, 344
Criterio de Dulac, 343
Criterio de estabilidad
    para sistemas no lineales, 324
Criterio M de Weierstrass, 364
Curva dirigida, 282

D'alambert
    fórmula de, 97
Definición
    E.D. lineal, 2
    E.D. no lineal, 2
    Ecuación Diferencial
      Ordinaria, 1
      Parcial, 1
    Orden de una E.D., 1
    problema de valor inicial, 3
    solución de una E.D., 2
    solución general, 3
    solución particular, 3
    solución singular, 3
    de exponencial
      de una matriz, 379
      de un operador, 379
    de punto crítico, 283
    ecuación diferencial, 1
    factorial generalizado, 189
    operador inverso, 125

Universidad de Antioquia, Dep. de Matemáticas

peso de un cuerpo, 78
transformada de Laplace, 211
Definida
negativa, 309
positiva, 309
Derivada de una exponencial
matricial, 380
Desigualdad de Gronwald, 370
Diluciones
gaseosas, 60
líquidas, 59
Dirac
función delta de, 240
propiedades de la función, 241
Dulac
criterio de, 343

Ecuación
auxiliar, 101
característica, 101
de continuidad, 60
indicial, 180, 182
Ecuación Diferencial
de Ayry, 174
de coeficientes lineales, 14
en variables separables, 7
homogénea, 10
lineal de orden mayor que dos y coeficientes constantes, 104
lineal de orden n y de coeficientes constantes, 101
barra de torsión, 151
Bernoulli, 31
circuitos en serie, 149
Clairaut, 41
de Bessel, 190
de Euler-Cauchy, 137
de Hermite, 177
de Legendre, 175
de Liénard, 345
de Van der Pol, 346
exacta, 16
hipergeométrica de Gauss, 207
lineal de primer orden, 26
logística, 59
movimiento amortiguado, 143
movimiento armónico simple, 142
movimiento forzado, 146
movimiento pendular, 152
movimiento pendular amortiguado, 152
no lineales de primer orden, 33
sustituciones varias, 42
Espacio propio, 261
Estabilidad, 293
criterio de, 306
Estabilidad asintótica
criterio de, 307
Euler
constante de, 194
fórmula de, 103
Euler-Cauchy
ecuación diferencial, 137
Exponencial de un operador, 377
Exponentes
de la singularidad, 180

Fórmula
de Abel, 91
de D'Alembert, 97
de Euler, 103
de Rodriguez, 176
Factor Integrante, 20
Factorial generalizado, 189
Fenómeno de resonancia, 148
Forma canónica, 26, 97, 112
Forma diferencial exacta, 16
Fracciones Parciales, 387

Universidad de Antioquia, Dept. de Matemáticas

Frecuencia de vibraciones libres, 143
Frobenius
teorema de, 179
Función
homogénea, 10
analítica, 168
de Bessel, 190
de primera especie, 192, 197
de segunda especie, 194, 199
propiedades, 199
de Liapunov, 310
de Lipschitz, 365
de orden exponencial, 212
definida
negativa, 309
positiva, 309
delta de Dirac, 240
escalón unitario, 220
Gamma, 187
fórmula de recurrencia, 187
impulso unitario, 240
onda cuadrada, 231
onda triángular, 232
rectificación completa
onda seno, 232
rectificación onda seno, 231
semidefinida
negativa, 310
positiva, 309
serrucho, 230

Gamma
fórmula de recurrencia, 187
función, 187
gráfica de la función, 188
Gauss
ecuación diferencial
hipergeométrica de, 207
serie hipergeométrica de, 208
Gráfica
de la función Gamma, 188
Gronwald
desigualdad de, 370

Hermite
polinomios
fórmula general, 177
polinomios de, 177
ecuación diferencial, 177
Hook
ley de, 141

Indices
de la singularidad, 180
Iteradas de Picard, 366

Jacobiana
matriz, 319

Lambert
ley de absorción de, 57
Laplace
transformada de, 211
Legendre
ecuación diferencial de, 175
polinomios de, 176
Lema
Lema de operadores, 123
Ley
de absorción de Lambert, 57
de enfriamiento de Newton, 57
de Gravitación Universal, 77
de Hook, 141
segunda, de Newton, 73
Liénard
teorema de, 346, 382
Liapunov
criterio de, 312
función, 310

Universidad de Antioquia, Depto de Matemáticas

Linealización, 319
Linealmente
dependientes, 90
independientes, 90
Lipschitz
función continua de Lipschitz, 365

Método
de variación de parámetros, generalización, 120
D'Alembert, 97
de los coeficientes indeterminados, 109
de reducción de orden, 97
de variación de parámetros, 112
para hallar la matriz exponencial, 268
para hallar los valores y vectores propios, 253
Método de solución
E.D. de Bernoulli, 31
homogéneas, 10
E.D. de Euler-Cauchy , 139
E.D. exactas, 17
no lineales de primer orden, 33
por series, 165
por transformada de Laplace para sistemas, 276
sustituciones varias, 42
Maclaurin
serie de, 168
Matriz
exponencial, 258
fundamental, 250
Jacobiana, 319
norma de, 372
principal, 251
Modelo de competición, 331
Modelo depredador-presa, 332
Movimiento
amortiguado, 143
armónico simple, 141
con resonancia, 148
críticamente amortiguado, 144
forzado, 146
pendular, 151
sobreamortiguado, 144
subamortiguado, 145

Núcleo
operador diferencial lineal, 84
dimensión, en una E.D., 90
Newton
ley de enfriamiento de, 57
ley de gravitación universal, 77
segunda ley de, 73
Nodo, 287
propio , 287
Norma de un operador, 377
propiedades, 377
Norma de una matriz, 372

Operador
anulador, 106
diferencial lineal, 84
Operador inverso e integrales, 136
Operadores y polinomios
isomorfismo, 128

Péndulo amortiguado, 152, 283
Parámetros de una solución, 3, 7
Periodo de una solución, 339
Periodo de vibraciones libres, 143
Picard
iteradas, 366
teorema de, 371, 372
Plano de fase, 282
Poincaré-Bendixson
teorema, 344

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

Polinomio característico, 104, 253
Polinomios
de Hermite, 177
de Legendre, 176
Polinomios y operadores
isomorfismo, 128
Posición de equilibrio, 142
Producto
convolutivo, 225
de Operadores Diferenciales, 85
Propiedades
de la matriz exponencial, 258
función delta de Dirac, 241
Punto
crítico, 283
aislado, 283
asintóticamente estable, 294
centro, 290
espiral, 292
estable, 293
foco, 292
nodo, 287
nodo impropio, 287
nodo propio, 287
simple, 320
sistemas no lineales, 321
de bifurcación, 293
de equilibrio, 283
de silla, 289
estacionario, 284
ordinario, 168
en el infinito, 202
singular, 168
irregular, 178
irregular en el infinito, 202
regular, 178
regular en el infinito, 202

Raíces
complejas, 103
con multiplicidad, 102
diferentes, 101
iguales, 102
Raíces indiciales
caso I, 183
caso II, 183, 184
caso III, 184, 190
Regla de Cramer, 113
Representación vectorial
de un sistema de E.D., 248
Resonancia, 148
Resortes acoplados, 158, 278
Retrato de fase, 282
Rodriguez, fórmula, 176

Salmuera, 60
Semidefinida
negativa, 310
positiva, 309
Serie
Maclaurin, 168
Taylor, 168
Serie de potencias
continuidad, 166
convergencia absoluta, 165
criterio de la razón, 166
derivabilidad, 166
función
coseno, 166
coseno-hiperbólico, 167
exponencial, 166
logaritmo, 167
seno, 166
seno inverso, 167
seno-hiperbólico, 166
tangente inversa, 167
hipergeométrica de Gauss, 208
integrabilidad, 166

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas

intervalo de convergencia, 165
radio de convergencia, 165
serie binomial, 167
serie de potencias, 165
sumables, 166
Singular
punto
irregular, 178
regular, 178
Sistema
autonomo, 281
cuasilineal, 320
homogéneo asociado de E.D., 247
no homogéneo de E.D., 247, 271
Solución de una E.D. por transformada de Laplace, 234
Solución vectorial
de una E.D., 248

Tabla de
transformadas de Laplace, 213
Tasa per cápita de crecimiento, 59
Taylor
serie de, 168
Teorema
básico de operadores, 124
de existencia y unicidad, 3, 87
de Picard, 3, 87
del Wronskiano, 91, 92
dimensión, Núcleo de L(D), 94
fórmula de Abel, 91
Lema de operadores, 123
criterio de Liapunov, 312
de Bendixsón, 344
de Dulac, 343
de estabilidad, 306
de estabilidad asintótica, 307
de existencia, 367
de existencia y unicidad
global, 376
de Frobenius, 179
de la función Gamma, 187
de la matriz fundamental, 266
de la matriz principal, 267
de Liénard, 346, 382
de Picard, 371
de Picard Generalizado, 372
de translación
primero, 219
segundo, 220
de unicidad, 371
del producto convolutivo, 225
derivada
de una transformada, 222
E.D.exactas, 16
estabilidad
sistemas no lineales, 324
existencia
transformada de Laplace, 211
existencia y unicidad
para sistemas, 373
sistemas lineales, 374
Factor Integrante, 21
lineal de primer orden, 26
naturaleza de los puntos
críticos, 297
operador inverso
funciones seno, coseno, 130
polinomios, 128, 129
seno y coseno, 132
para puntos ordinarios, 169
para valores propios
diferentes, 253
Poincaré-Bendixson, 344
principio de superposición , 85
soluciones particulares, 125–127

Universidad de Antioquia, Depto de Matemáticas

soluciones particulares complejas, 132
transformada
de la derivada, 224
transformada de una función periódica, 228
Teorema de Liénard, 381
Tiempo de vida media, 56
Transformada
de la derivada, 224
de la integral, 227
de una potencia, 227
derivada de la, 222
función periódica, 228
inversa de Laplace, 215
producto convolutivo, 225
Transformada de Laplace
para sistemas, 276
Trayectoria
cerrada aislada, 339
definición de, 282
periódica, 339
Trayectorias
isogonales, 50
ortogonales, 50

Valor y vector propio, 252
Valores propios
complejos, 255
defectuosos, 263
repetidos, 257
Van der Pol
ecuación diferencial, 346
Variación de parámetros, 271
Variación de parámetros, método, 112
Vector y valor propio, 252
Vectores propios generalizados, 263
Weierstrass
criterio M de, 364
Wronskiano, 90, 251
teorema del, 92

Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas